ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Группа зацепления.

Гладкой (многокомпонентной) кривой в $\mathbb{R}^n$ называется непрерывно дифференцируемое отображение $f : S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^n$ такое, что $f'(x) \neq 0$ при всех x. Гладкая кривая f в $\mathbb{R}^2$ называется регулярной, если имеет только простые трансверсальные самопересечения, т.е. для всякой точки $a \in \mathbb{R}^2$ прообраз $f^{-1}(a)$ содержит не более двух точек, и если их две, x и y, то векторы $f'(x)$ и $f'(y)$ не параллельны. Гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$ называется зацеплением, если она – вложение: $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$. Зацепление f называется регулярным, если проекция $p \circ f$ — регулярная гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$; здесь $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ — ортогональная проекция на координатную плоскость xy.

Изотопией зацеплений f_0 и f_1 называется непрерывное отображение $F : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такое, что $F(0,v) = v$ при всех $v \in \mathbb{R}^3$ и $F(1, f_0(x)) = f_1(x)$ при всех $x \in S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$.

Группой зацепления называется фундаментальная группа дополнения к его образу. Очевидно, что у изотопных зацеплений группы изоморфны.

Теорема 1. *Всякое зацепление изотопно регулярному.*

Доказательство — упражнение.

Теорема 2. *Пусть f_0 – регулярное зацепление. Тогда существует изотопное ему зацепление f такое, что образы кривых $\psi \overset{def}{=} p \circ f$ и $\varphi \overset{def}{=} p \circ f_0$ совпадают и*

- *если $\varphi(x) = a$ лежит на расстоянии больше $\varepsilon > 0$ от точек самопересечения кривой φ, или на расстоянии, меньшем ε, но на верхней ветви кривой, то $\psi^{-1}(a) = \{y\}$ и $z(f(y)) = 1$.*
- *если $\varphi(x) = a$ лежит ближе $\varepsilon > 0$ от точки самопересечния кривой φ на ее нижней ветви, то $\psi^{-1}(a) = \{y\}$ и $z(f(y)) = 0$.*
- *если $\varphi(x) = a$ лежит в точности на расстоянии ε от точки самопересечения на нижней ветви кривой, то $\psi^{-1}(a) = [x_1, x_2]$, причем $z \circ f : [x_1, x_2] \to [0,1]$ — линейная функция.*

Доказательство очевидно.

Пусть теперь $f : S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^3$ — зацепление, описанное в теореме 3; $\gamma \overset{\text{def}}{=} f(S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1)$ — его образ, а $N \supset \gamma$ — замкнутая окрестность γ, представляющая собой квадратный в сечении "туннель" толщиной $\varepsilon > 0$. Очевидно, $\mathbb{R}^3 \setminus N \sim \mathbb{R}^3 \setminus \gamma$, так что $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N)$ изоморфно группе зацепления. Положим $A_1 = \{(x,y,z) \mid z > 0\} \setminus N$, $A_2 = \{(x,y,z) \mid z < \varepsilon/2\} \setminus N$; тогда $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^3 \setminus N$. Очевидно, A получается из полупространства отрезанием конечного количества "ручек" (квадратных в сечении цилиндров), прикрепленных основаниями к границе полупространства; оси цилиндров соответствуют "нитям" (непрерывным дугам на диаграмме зацепления), т.е. отрезкам кривой $\varphi = p \circ f$, соединяющим точки, в которых соответствующая ветвь кривой идет снизу.

Теорема 3. *A_1 гомотопически эквивалентно букету окружностей, где число окружностей равно количеству ручек. Если $X \subset A_1$ — букет окружностей, где каждая из окружностей охватывает один раз соответствующую ручку, то A_1 деформационно ретрагируется на X.*

Доказательство — упражнение.

Очевидно, что A_2 гомеоморфно полупространству и, следовательно, стягиваемо. Пересечение $A_1 \cap A_2$ гомеоморфно слою $\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon/2]$, из которого вырезана дырка около каждой точки самопересечения кривой φ. Нетрудно видеть, что $A_1 \cap A_2$ гомотопически эквивалентно букету окружностей, где число окружностей равно числу указанных точек самопересечения. Естественный гомоморфизм групп $\iota_* : \pi_1(A_1 \cap A_2) \to \pi_1(A_1)$ переводит стандартную образующую, соответствующую пересечению i (петлю, охватывающую один раз точку самопересечения), в элемент $aba^{-1}c$, где a — образующая в $\pi_1(A_1)$, соответствующая верхней нити пересечения, а b и c — нижним нитям. Отсюда по теореме ван Кампена получаем, что группа зацепления изоморфна группе, порожденной образующими, соответствующими нитям, с соотношением $aba^{-1}c = 1$ для каждого пересечения (*представление Виртингера*).

Пример 1. Для незацепленной окружности (тривиального узла) группа равна $\mathbb{Z}$ (одна образующая, нет соотношений).

Пример 2. Для двух незаузленных и незацепленных окружностей группа — свободная группа с числом образующих, равным количеству окружностей.

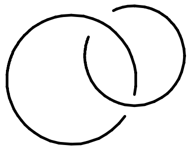

Рис. 1. Простейшее нетривиальное зацепление

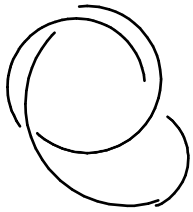

Рис. 2. Узел трилистник

Пример 3. Для двух незаузленных окружностей, зацепленных простейшим образом (см. рис. 1), имеются две образующих a и b и два идентичных соотношения $aba^{-1}b^{-1} = 1$, то есть $ab = ba$. Следовательно, группа зацепления изоморфна $\mathbb{Z}^2$. Отсюда вытекает, что зацепленные окружности нельзя расцепить изотопией.

Пример 4. Для узла трилистник (см. рис. 2) имеем три образующих a, b, c и соотношения $aba^{-1}c = bcb^{-1}a = cac^{-1}b = 1$. Рассмотрим отображение $\mathcal{F}(a, b, c) \to S_3$, переводящее образующие a, b, c в транспозиции (12), (23), (13) соответственно. Тогда элементы соотношений принадлежат ядру гомоморфизма и, следовательно, гомоморфизм можно рассматривать как эпиморфизм группы узла на S_3. Отсюда вытекает, что группа узла трилистник некоммутативна. Отсюда вытекает, что трилистник нельзя развязать.