Римановы поверхности, пространства модулей и квазиконформные отображения

А.А.Глуцюк, С.М.Натанзон

Весенний семестр 2013/2014

Contents

1. Лики римановых поверхностей.

1.1. **Категория римановых поверхностей.** Риманова поверхность — это одномерное комплексное многообразие. Другими словами риманова поверхность — это поверхность (т.е. двумерное топологическое многообразие) с дополнительной структурой, наделяющей точки поверхности некоторыми свойствами комплексных чисел. Эти свойства описываются с помощью *локальных карт*, то есть пар (U, z), где U — открытое подмножество поверхности P, а $z : U \to \mathbb{C}$ — непрерывное вложение в плоскость комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Семейство локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ называется *голоморфным атласом на* P, если $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = P$ и отображения $z_\beta z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \to \mathbb{C}$ голоморфны для всех $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Голоморфные атласы $\{(U_\alpha, z_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ и $\{(V_\beta, w_\beta) | \beta \in \mathcal{B}\}$ на поверхности P считаются *эквивалентными*, если их объединение — также голоморфный атлас.

Римановой поверхностью называется (топологическая) поверхность P вместе с классом эквивалентности голоморфных атласов локальных карт.

Задача 1.1. *Докажите, что риманова поверхность ориентируема*

Морфизмами в категории римановых поверхностей являются *голоморфные отображения* $\varphi : P_1 \to P_2$, то есть отображения голоморфные в каждой локальной карте. Другим словами функции $f_2 \varphi f_1^{-1} : f_1(U_1) \bigcap U_2 \to \mathbb{C}$ является голоморфными отображениями для любо пары локальных карт (U_i, f_i) римановых поверхностей P_i.

Теория римановых поверхностей является, таким образом, фундаментом теории комплексных многообразий.

Простейшие примеры римановых поверхностей — это:

1. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ и любое его открытое подмножество (т.е. область).

2. Сфера Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \infty$ с атласом из двух локальных карт $\{(U_1, z_1)(U_2, z_2)\}$, где $U_1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 2\}$, $z_1(z) = z\}$ и $U_2 = \{z \in \mathbb{C} | |z| > \frac{1}{2}\}$, $z_2(z) = \frac{1}{z}\}$.

Задача-пример 1.1. *Задайте структуру римановой поверхности на торе* $T = \mathbb{C}/\Gamma$, *где* Γ — *группа параллельных переносов, порожденная сдвигами* $z \mapsto z + 1$ *и* $z \mapsto z + \tau$ *и* $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$.

1.2. **Алгебраические кривые.** Каждый комплексный многочлен $F(x, y)$ порождает *плоскую комплексный алгебраическую кривую* $P_F = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{C}}^2 | F(x, y) = 0\}$. Соответствия $(x, y) \mapsto x$ и $(x, y) \mapsto y$ порождают отражения $x : P_F \to \overline{\mathbb{C}}$ и $y : P_F \to \overline{\mathbb{C}}$. Кривая P_F называется *неособой*, если множества критических точек функций x и y не пересекаются, то есть $\{p \in P_F | dx(p) = 0\} \bigcap \{p \in P_F | dx(p) = 0\} = \emptyset$.

Рассмотрим множество критических значений $\mathtt{Vcr}(x) = x(\{p \in P_F | dx(p) = 0\})$ функции x, открытое односвязное подмножество $V \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathtt{Vcr}(x)$ и компоненту связности U^x его прообраза $x^{-1}(V)$.

Задача 1.2. *Докажите, что значения $f(p_1) \neq f(p_2)$ при $p_1 \neq p_2 \in U^x$*

Таким образом множества вида $(U^x, x|_U)$ образуют систему локальных карт на $P_F \setminus \{p \in P_F | dx(p) = 0\}$. Аналогичную систему локальных карт $(U^y, y|_U)$ порождает функция y.

Задача-пример 1.2. *Докажите, что локальные карты вида $(U^x, x|_U)$ и $(U^y, y|_U)$ образуют на неособой плоской комплексной алгебраической кривой P_F голоморфный атлас, превращая ее в компактную риманову поверхность. Явно укажите атлас такого типа для гиперэллиптической кривой $P_F = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{C}}^2 | F(x, y) = 0\}$, где $F(x, y) = y^2 - (x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + ... + a_1 x + a_0)$*

В последствии мы докажем, что любая компактная риманова поверхность изоморфна римановой поверхности, порожденной неособой полоской алгебраической кривой. И более того, категория компактных римановых поверхностей изоморфна некоторой категории комплексных алгебраических кривых.

Теория римановых поверхностей является, таким образом, фундаментом алгебраической геометрии.

1.3. **Аналитические функции.** Зависимости, возникающие в естествознании часто описываются многозначными функциями ($y = \sqrt[n]{x}$, $y = \ln(x)$ и др.) Концепция многозначного отображения плохо вкладывается систему современных математических понятий, основанную на однозначных отображениях. К счастью, нужные для естествознания функции, как правило, локально голоморфны. Это позволяет рассматривать их как однозначные функции на некоторых римановых поверхностях.

Риманова поверхность строится с помощью канонических элементов. *Каноническим элементом* называется пара (U_a, f_a), где $U_a \in \mathbb{C}$ — круг с центром в a, и $f_a(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z-a)^i$ — ряд сходящийся в U_a. Такие пары возникают, например, при локальном описании неявной функции $F(z, w) = 0$ в виде зависимости $w = f(z)$ в окрестности точки (z_0, w_0), где $F(z_0, w_0) = 0$.

Канонические элементы (U_a, f_a) и $(\tilde{U}_a, \tilde{f}_a)$ считаются *эквивалентными*, если $f_a|_{U_a \cap \tilde{U}_a} = \tilde{f}_a|_{U_a \cap \tilde{U}_a}$. Говорят, что канонический элемент (U_b, f_b) является *аналитическим продолжением канонического элемента* (U_a, f_a) *вдоль пути* $\gamma \subset \mathbb{C}$ *с концами в точках* a *и* b, если существуют эквивалентные (U_a, f_a) и (U_b, f_b) канонические элементы $(\tilde{U}_a, \tilde{f}_a)$ и $(\tilde{U}_b, \tilde{f}_b)$, область $D \supset \gamma \cup \tilde{U}_a \cup \tilde{U}_b$ и голоморфная функция $f : D \to \mathbb{C}$ такие, что $f|_{\tilde{U}_a} = f_a$ и $f|_{\tilde{U}_b} = \tilde{f}_b$.

На практике это означает, что мы фиксируем на γ конечное число точек и сопоставляем каждой из них канонический элемент таким образом, чтобы ряды соседних канонических элементов совпадали на пересечении областей определения, а конечные канонические элементы совпадали с (U_a, f_a) и (U_b, f_b).

Рассмотрим теперь семейство $\{(U_b, f_b) | b \in B\}$ всех канонических элементов, являющихся аналитическим продолжением (U_a, f_a), рассмотрим несвязное объединение $\sqcup_{b \in B} U_b$ и отождествим точки $z_1 \in U_{b_1}$ и $z_2 \in U_{b_2}$, если $f_{b_1}(z_1) = f_{b_1}(z_1)$.

Задача 1.3. *Докажите, что эта конструкция сопоставляет каноническому элементу* (U_a, f_a) *риманову поверхность* P. *Функции* $\{f_b | b \in B\}$ *порождают при этом голоморфную функцию* $f : P \to \mathbb{C}$.

Задача 1.4. *Доказать, что канонический элемент* $(U^x, x|_U)$, *порожденный неособой полиномиальной зависимостью* $F(x, y) = 0$, *порождает риманову поверхность* P_F *и функцию* $x : P_F \to \overline{\mathbb{C}}$

Задача 1.5. *Построить римановы поверхности функций* $w = \ln(z)$.

1.4. **Дифференциальная геометрия.** Ниже мы увидим, что любая риманова поверхность допускает естественную метрику постоянной кривизны, равной 1 для сферы Римана $\overline{\mathbb{C}}$, равной 0 для $\mathbb{C}$, цилиндра $\mathbb{C}/ < z \mapsto z + b >$ и тора, и равной -1 в остальных случаях. Более того, всякой такой метрике однозначно соответствует риманова поверхность. Таким образом, изучая римановы поверхности мы изучаем дифференциальную геометрию поверхностей постоянной кривизны. Более того конформный тип (величина углов между кривыми) для произвольной римановой метрики на поверхности однозначно описывается некоторой структурой римановой поверхности на ней.

1.5. **Интегрируемые системы и теория струн.** В конце 20 века были открыты специального вида бесконечные системы дифференциальных уравнений, описывающие широкий класс нелинейных явлений — так называемые *интегрируемые системы.* Позже выяснилось что они естественно возникают в большинстве разделах математики, устанавливая взаимосвязи между ними. Кроме того, неожиданно выяснилось, что важные классы решений интегрируемых систем, в частности периодические решения, находятся с помощью римановых поверхностей.

Другим событием, поставившим римановы поверхности в центр математических исследований стало развитие *теории струн*: современного варианта единой теории поля. Согласно этой теории, элементарные объекты физики похожи на контуры в пространстве, а не на точки. Траектория частицы в пространстве-времени представляет тогда не линию, а поверхность. Метрика пространства-времени индуцирует на такой траектории риманову метрику. Вероятность траектории определяется конформным типом этой метрики, то есть структурой римановой поверхности на ней. Фемановские интегралы переходят при этом в интеграл по пространству всех римановых поверхностей (пространству модулей).

Эти важные приложения сделали теории римановых поверхностей одним из главных направлений современной математики.

2. Гармонические функции.

"Многогранность" римановой поверхности позволяет использовать для ее исследования различные разделы математики. Очень эффективным оказывается в частности подход через гармонические функции и функции Грина.

Как и раньше мы будем отождествлять вещественную плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\}$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C} = \{z\}$, полагая $z = x + iy$. Напомним, что открытое подмножество $D \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ называется *областью.*

Определение 2.1. *Вещественная функция $u(x,y)$ на области D с непрерывными вторыми частными производными называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, где*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

— оператор Лапласа.

Гармонические функции естественно возникают при решении широкого круга прикладных задач от гидромеханики до теоретической физики.

Теорема 2.1. *Функция u на связной односвязной области D является гармонической, если и только если она совпадает с вещественной частью некоторой голоморфной функции f, т.е. $u(x,y) = \mathtt{Re} f(x+iy)$.*

Proof. Пусть $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ — голоморфная функция. Тогда условия Коши-Римана дают

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

поэтому,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Пусть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial u}{\partial y})$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x})$$

, что эквивалентно условиям Коши-Римана на функцию

$$g(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким образом, $g(z)$ — голоморфная функция. Рассмотрим ее первообразную

$$f(x+iy) = f(z_0) + \int_{z_0}^{z} g(z)dz = f(z_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y})(dx + idy).$$

Тогда

$$\mathtt{Re} f(x+iy) = u(x_0,y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) = u(x,y).$$

□

Задача 2.1. *Доказать, что функция u на связной односвязной области D является гармонической, если и только если она совпадает с мнимой часть некоторой голоморфной функции.*

Тесная связь между гармоническими и голоморфными функциями позволяет легко переносить на гармонические функции многие свойства голоморфных.

Задача 2.2. *Доказать, что на области D:*

- *Гармоническая функция бесконечно дифференцируема, причем все ее частные производные также гармонические.*
- *Биголоморфная замена области определения переводит гармоническую функцию в гармоническую.*
- *Гармонические функции на связном множестве совпадают, если они совпадают на его открытом подмножестве.*

2.1. **Интегральные формулы для гармонической функции.** Далее мы считаем, что граница области ∂D является аналитической кривой, ориентированной как граница области D. Через

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

будет обозначаться производная по направлению внешней нормали $n = (\cos\theta, \sin\theta)$ к границе ∂D.

Задача 2.3. *Используя формулу Стокса и соотношение*

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}ds = -\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy,$$

доказать формулу Грина

$$\oint_{\partial D}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds = \int\int_D(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y})dxdy + \int\int_D\varphi(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2})dxdy,$$

для дважды непрерывно дифференцируемых в D функций φ, ψ.

Задача 2.4. *Пусть функции $u(x+iy) = u(x,y)$ и $v(x+iy) = v(x,y)$ гармонические в D и дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$. Доказать, что $\oint_{\partial D}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})ds = 0$ и $\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds = 0$.*

Теорема 2.2. *Пусть функция $u(x+iy) = u(x,y)$ гармоническая в D и дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$. Тогда*

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi\rho}\oint_{|z-\xi|=\rho}u(z)ds$$

при $U_\rho = \{z \in \mathbb{C}||z-\xi| < \rho\} \subset D$ и

$$\oint_{z\in\partial D}\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = \delta 2\pi u(\xi),$$

где $\delta = 1$ при $\xi \in D$ и $\delta = 0$ при $\xi \in \mathbb{C}\setminus\bar{D}$

Proof. Рассмотрим функцию

$$v(z) = \mathtt{Re}(\ln(z-\xi)) = \ln|z-\xi|.$$

При $0 < |z-\xi| < \infty$ она является вещественной частью голоморфной функции и, следовательно, гармоническая на $\mathbb{C}\setminus\xi$. Согласно задаче 2.4 отсюда следует, что

$$\oint_{\partial D}\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = 0$$

при $\xi \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$.

Пусть теперь $\xi \in D$. Рассмотрим окрестность $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} | |z-\xi| < \rho\} \subset D$ и область $D_\rho = D \setminus U_\rho$. Тогда $\xi \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}_\rho$ и из только что доказанного утверждения следует, что

$$\oint_{\partial D_\rho} \{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = 0.$$

Таким образом,

$$\oint_{\partial D} \{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = \oint_{\partial U_\rho} u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi|ds - \oint_{\partial U_\rho} \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|ds.$$

С другой стороны, $\ln|z-\xi| = \ln\rho$ на ∂U_ρ и, следовательно, второй интеграл равен 0 согласно задаче 2.4. Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| = \frac{\partial}{\partial r}\ln r|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho}$$

и, следовательно,

$$\oint_{\partial D} \{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = \frac{1}{\rho}\oint_{\partial U_\rho} u(z)ds.$$

Левая часть равенства не меняется при $\rho \to 0$, откуда,

$$\oint_{\partial D} \{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = \frac{1}{\rho}\oint_{\partial U_\rho} u(z)ds = 2\pi u(\xi).$$

□

2.2. **Функция Грина.**

Определение 2.2. *Функцией Грина $G = G_D$ в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется функция $G(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|z-\xi| + g(z,\xi)$ на $\overline{D} \times \overline{D}$, где*

- *$G(z,\xi) = G(\xi,z)$ и $G(z,\xi') = 0$ при любых $z \in D$ и $\xi' \in \partial D$;*
- *функция $g(z,\xi)$ непрерывна в $D \times D$ и непрерывна по ξ в $\overline{D}$ при любом $z \in D$*
- *функция $g(z,\xi)$ гармонична по z при любом $\xi \in D$ и гармонична по ξ при любом $z \in D$.*

Задача 2.5. *Доказать, что существует не более одной функции Грина.*

Для связной односвязной области, ограниченной жордановыми кривыми, функция Грина существует и выражается через биголоморфное отображение на единичный диск $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$, существующее согласно теореме Римана.

Теорема 2.3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — связная односвязная область и $w : D \to \Lambda$ биголоморфное отображение на единичный диск. Положим $W(z,\xi) = \frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\overline{w(\xi)}}$. Тогда $G(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|W(z,\xi)|$ — функция для Грина области D.*

Proof. Зафиксируем произвольную точку $\xi \in D$ и рассмотрим $w_\xi(z) = W(z,\xi)$ как функцию от $z \in D$. Эта функция конформно отображает область $D = \{z\}$ на диск Λ и имеет единственный 0 при $z = \xi$.

Таким образом, функция $\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}$ голоморфна и не обращается в 0. Следовательно, функция $\ln\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}$ голоморфна и функция

$g(z,\xi) = G(z,\xi) - \frac{1}{2\pi}\ln|z-\xi| = \frac{1}{2\pi}\ln|\frac{W(z,\xi)}{z-\xi}| = \frac{1}{2\pi}\ln|\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}| = \frac{1}{2\pi}\mathtt{Re}\ln\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}$ гармонична по z при любом $\xi \in D$. Ее симметрия и непрерывность по паре переменных (z,ξ) следуют из $|W(z,\xi)| = \frac{|w(z)-w(\xi)|}{|1-w(z)\overline{w(\xi)}|}$. Кроме того, согласно теореме о соответствии границ функция $w_\xi(z)$ непрерывна на замыкании $\overline{D}$ и $|w_\xi(\partial D)| = 1$, откуда $G(\partial D,\xi) = 0$ □

Доказанную теорему можно эффективно использовать для вычисления функции Грина в простых областях. В частности:

Для единичного диска Λ отображение $w_\xi(z) = \frac{(z-\xi)}{1-z\bar{\xi}}$ порождает функцию Грина $G_\Lambda(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z-\xi|}{|1-z\bar{\xi}|}$.

Для правой полуплоскости $H = \{z \in \mathbb{C}|\mathtt{Re}z > 0\}$ отображение $w_\xi(z) = \frac{z-\xi}{z+\xi}$ порождает функцию Грина $G_\Lambda(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|\frac{z-\xi}{z+\xi}|$.

2.3. **Задача Дирихле.**

Определение 2.3. *Задача Дирихле для области D состоит в отыскании функции u, гармонической в области D и непрерывной на замыкании $\bar{D}$ по ее (ограниченному, непрерывному) значению $u|_{\partial D} = \varphi$ на граничном контуре.*

Задача 2.6. *Доказать, что задача Дирихле имеет не более одного решения.*

Функция Грина дает решение задачи Дирихле в следующем смысле.

Теорема 2.4. *Пусть $G(z,\xi) = G_D(z,\xi)$ — функция Грина в области D. Тогда функция*

$$u(z) = \oint_{\xi\in\partial D} \varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds$$

решает задачу Дирихле для D.

Proof. Гармоничность функции $u(z) = \oint_{\xi\in\partial D}\varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds$ следует из гармоничности $G(z,\xi)$ по z при любом $\xi \in D$. Осталось доказать, что гармоническая функция $u(z)$ удовлетворяет соотношению

$$u(z) = \oint_{\xi\in\partial D} u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds.$$

Согласно нашим определениям,

$$G(z,\xi) = \frac{\ln r}{2\pi} + g(z,\xi),$$

где $r = |z-\xi|$. Согласно теореме 2.2 и задаче 2.4

$$2\pi u(z) = \oint_{\xi\in\partial D}\{u(\xi)\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\ln r\}ds$$

и

$$\oint_{\xi\in\partial D}\{u(\xi)\frac{\partial g}{\partial n}(z,\xi) - g(z,\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\}ds = 0,$$

при $z \in D$. Следовательно,

$$\oint_{\xi\in\partial D}\{u(\xi)\frac{\partial G}{\partial n}(z,\xi) - G(z,\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\}ds = \oint_{\xi\in\partial D}\{u(\xi)\frac{\partial(\frac{\ln r}{2\pi} + g(z,\xi))}{\partial n} - (\frac{\ln r}{2\pi} + g(z,\xi))\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\}ds = u(z).$$

Кроме того, $G(z,\xi)=0$ при $\xi\in\partial D$. $\square$

Найденные функции Грина для простых областей позволяют решать для них задачу Дирихле. Функции Грина для диска Λ равна, как мы знаем, $G_\Lambda(z,\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z-\xi|}{|1-z\bar\xi|}$. Положим $z=re^{i\varphi}$, $\xi=\rho e^{i\theta}$. Тогда $\frac{\partial}{\partial n}G(re^{i\varphi},\rho e^{i\theta})=$

$$\frac{1}{2\pi}\mathtt{Re}\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\frac{re^{i\varphi}-\rho e^{i\theta}}{1-r\rho e^{i(\varphi-\theta)}}|_{\rho=1}=\frac{1}{2\pi}\mathtt{Re}\{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}}+\frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{1-re^{i(\theta-\varphi)}}\}=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}.$$

Таким образом, задача Дирихле для диска решается *формулой Пуассона для диска* $|z|<1$:

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}u(e^{i\theta})d\theta.$$

Задача 2.7. *Доказать формулу Пуассона для правой полуплоскости* $\mathtt{Re}z>0$*:*

$$u(x+iy)=\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(i\eta)d\eta}{(y-\eta)^2+x^2}.$$

Задача 2.8. *Найти формулы Шварца для диска*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\mathtt{Re}F(Re^{i\theta})d\theta+iC\quad(|z|<R)$$

и верхней полуплоскости,

$$F(z)=\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathtt{Re}F(i\eta)}{(i\eta-z)}d\eta+iC,$$

восстанавливающие голоморфную функцию по значению ее вещественной части на границе.

2.4. **Пространство односвязных областей.** Конформные отображения необходимы для решения широкого круга прикладных задач (аэро и гидро механика, нефтедобыча и др.). Поэтому хотелось бы дополнить теорему Римана о существовании конформного отображения односвязной области D в единичный круг Λ явным построением такого отображения. До недавнего времени это удавалось сделать лишь для простейших многоугольников.

Прогресс в этой проблеме пришел с совершенно неожиданной стороны и оказался связанным с теорией интегрируемых систем, которая разрабатывалась для решения новых проблем математической физики (движение плазмы, теория гравитации и др.). Этот новый подход был разработан около 10 лет назад. Большинство участников этого открытия работают сейчас на нашем факультете (А.В. Забродин, И.М. Кричевер, А.В. Маршаков, Т.Такебе, С.М. Натанзон).

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}$ всех содержащих ∞ односвязных областей с аналитической границей на сфере Римана, замыкание которых не содержит 0.

В качестве координат в этом бесконечномерном пространстве мы будем рассматривать *гармонические моменты Ричардсона*, предложенные в середине 20 века для решения обратной задачи теории потенциала.

$$t_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q} d^2 z, \qquad t_k = -\frac{1}{\pi k}\iint\limits_{Q} z^{-k} d^2 z \quad (k = 1, 2, ...), \qquad d^2 z = dxdy.$$

Можно доказать, что эти функции являются локальными координатами на пространстве $\mathcal{H}$. Функции на пространстве $\mathcal{H}$, которые мы будем рассматривать, не голоморфны по $\{t_k\}$. Поэтому (как мы и раньше поступали в таких случаях) нам будет удобно считать, что эти функции раскладываются в ряд по переменным $\{t_k\}$ и $\{\bar{t}_k\}$. Через $Q^t \in \mathcal{H}$ будет обозначаться область, отвечающая координатам $t = \{t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, ...\}$.

Рассмотрим параметризованное z и $\bar{z}$ семейство векторных полей на $\mathcal{H}$

$$D(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{z^{-k}}{k}\frac{\partial}{\partial t_k}, \quad \bar{D}(\bar{z}) = \sum_{k\geq 1} \frac{\bar{z}^{-k}}{k}\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k}, \quad \nabla(z) = \frac{\partial}{\partial t_0} + D(z) + \bar{D}(\bar{z}).$$

Обозначим через $\mathcal{H}_z \subset \mathcal{H}$ множество областей, содержащих точку $z \in \mathbb{C}$. Рассмотрим область $Q \in \mathcal{H}_z$, точки корой будут обозначаться ξ. Обозначим через $G_Q(z, \xi)$ ее функцию Грина. Сопоставим области Q область Q_ε, получающуюся из области Q сдвигом границы на величину $-\epsilon\pi\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z,\xi)$ в направлении внешней нормали к границе области Q.

Векторные поля на $\mathcal{H}_z$ — это линейные функционалы на множестве заданных на $\mathcal{H}_z$ функций. Обозначим через δ_z векторное поле на $\mathcal{H}_z$, которое переводит функцию $X : \mathcal{H}_z \to \mathbb{C}$ в функцию, принимающую на области Q значение $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(X(Q_\epsilon) - X(Q))$.

Задача 2.9. *Доказать, что $\delta_z(t_0) = 1$.*

Лемма 2.1. *Векторные поля δ_z и $\nabla(z)$ совпадают на множестве функций, определенных на $\mathcal{H}_z$. Кроме того, если f — гармоническая функция в окрестности множества Q и $X(Q) = \iint\limits_Q f(\xi)d^2\xi$, то $\delta_z X = -\pi f(z)$.*

Proof. Рассмотрим функционал $X(Q) = \iint\limits_Q f(\xi)d^2\xi$, где f — гармоническая функция. Тогда

$$\delta_z X = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\iint\limits_{(Q_\epsilon\setminus Q)}(-\pi)\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z,\xi)f(\xi)d^2\xi = -\pi\oint\limits_{\xi\in\partial Q} f(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z,\xi)ds = -\pi f(z).$$

Применяя это наблюдение к координатам

$$t_k = -\frac{1}{\pi k}\Big(\iint\limits_Q \mathtt{Re}(z^{-k})d^2z + i\iint\limits_Q \mathtt{Im}(z^{-k})d^2z\Big),$$

находим что

$$\delta_z(t_k) = \frac{1}{k}\big(\mathtt{Re}(z^{-k}) + i\mathtt{Im}(z^{-k})\big) = \frac{z^{-k}}{k}.$$

Аналогично $\delta_z(\bar{t}_k) = \frac{\bar{z}^{-k}}{k}$, откуда

$$\delta_z(X) = \frac{\partial X}{\partial t_0}\delta_z t_0 + \sum\frac{\partial X}{\partial t_k}\delta_z t_k + \sum\frac{\partial X}{\partial \bar{t}_k}\delta_z \bar{t}_k = (\frac{\partial}{\partial t_0} + \sum_{k\geq 1}\frac{z^{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{k\geq 1}(\bar{z})\frac{\bar{z}^{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k})X.$$

□

Лемма 2.2. *Пусть функционал* $X(Q) = \iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q} f(v) d^2 v$ *порожден непрерывной функций* f*, определенной в окрестности множества* $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ *и* $z \in Q$*. Тогда* $\nabla(z)X = \pi f^h(z)$*, где* $f^h(z)$ *— гармоническая в* Q *функция, совпадающая с* f *на* ∂Q*.*

Proof. Повторяя рассуждения леммы 2.1 находим $\nabla(z)X = \delta_z X = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon^2} \iint\limits_{(Q_\epsilon \setminus Q)} f(v)(-\epsilon\pi) \frac{\partial}{\partial n} G_Q(z,v) d^2 v = -\pi \oint\limits_{v\in\partial(\overline{\mathbb{C}}\setminus Q)} f(v) \frac{\partial}{\partial n} G_Q(z,v) ds = \pi \oint\limits_{v\in\partial Q} f(\xi) \frac{\partial}{\partial n} G_Q(z,v) ds = \pi \oint\limits_{\xi\in\partial Q} f^h(v) \frac{\partial}{\partial n} G_Q(z,v) ds.$ Согласно теореме 2.4 отсюда следует $\nabla(z)X = \pi f^h(z)$. □

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 2.2 с учетом соотношения $\lim\limits_{\Delta\to\emptyset}((\iint\limits_{\Omega\cup\Delta} - \iint\limits_{\Omega})(\iint\limits_{\Omega\cup\Delta} - \iint\limits_{\Omega})) f(u,v) d^2 u d^2 v = (\iint\limits_{\Omega}\iint\limits_{\Delta} + \iint\limits_{\Delta}\iint\limits_{\Omega}) f(u,v) d^2 u$.

Задача 2.10. *Пусть функционал* $X(Q) = \iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q}\iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q} f(u,v) d^2 u d^2 v$ *порожден непрерывной функций* f*, определенной в окрестности множества* $(\overline{\mathbb{C}}\setminus Q)\times(\overline{\mathbb{C}}\setminus Q)$ *и* $z \in Q$*. Тогда* $\nabla(z)X = 2\pi\Phi(z)$*, где* $\Phi(z)$ *— гармоническая в* Q *функция, совпадающая с* $\iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q} f(z,u) d^2 u$ *на* ∂Q*.*

Рассмотри функционал $F(Q) = -\frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q}\iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q} \ln|u^{-1} - v^{-1}| d^2 u d^2 v$**.**

Теорема 2.5. *Функция Грина* $G_Q(z,\xi)$ *области* Q *выражается через функционал* F *по формуле*

$$G_Q(z,\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln|z^{-1} - \xi^{-1}| + \frac{1}{4\pi} \nabla(z)\nabla(\xi) F.$$

Proof. Согласно задаче 2.10, $\nabla(z)F = 2\pi\Phi(z)$, где $\Phi(z)$ — гармоническая на Q функция, совпадающая с $-\frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q} \ln|u^{-1} - z^{-1}| d^2 u$ на ∂Q. Согласно лемме 2.2, $\nabla(\xi)\Phi(z) = \pi l(z,\xi)$, причем функция $l(z,\xi)$ гармонична на Q по ξ при каждом z и совпадает с $-\frac{1}{\pi^2} \ln|\xi^{-1} - z^{-1}|$ на ∂Q. Таким образом $\nabla(z)\nabla(\xi)F = 2\pi^2 l$ — гармоническая функция, совпадающая с $-2\ln|\xi^{-1} - z^{-1}|$ при $\xi \in \partial Q$. Следовательно функция $\frac{1}{2\pi}\ln|z^{-1} - \xi^{-1}| + \frac{1}{4\pi}\nabla(z)\nabla(\xi)$ удовлетворяет всем аксиомам функции Грина и, следовательно, совпадает с ней. □

2.5. **Эффективизация теоремы Римана.** Обозначим через $w(z,t)$ биголоморфное отображение области Q^t на внешность единичного круга $\{z \in \overline{\mathbb{C}} | |z| > 1\}$ нормированное условиями $w^t(\infty) = \infty$ и $\mathtt{Im}\partial_z w^t(\infty) = 0$, $\mathtt{Re}\partial_z w^t(\infty) > 0$.

Отображение имеет вид $w(z,t) = p(t)z + \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j(t) z^{-j}$, где в виду нормировки $p(t) \in \mathbb{R}$ и $p'(0) > 0$. В этом параграфе мы найдем функции $p(t), p_0(t), p_1(t), \ldots$.

Задача 2.11. *Докажите, что* $w(z,t) = \frac{z}{\sqrt{(t_0)}}$ *при* $t = (t_0, 0, 0, \ldots)$*.*

Нам понадобится бесконечная система дифференциальных уравнений: *двумерная бездисперсионная цепочка Тоды.* Она была построена в конце 90 годов для нужд математической физики. Для наших целей будет удобно ее описание в виде системы соотношений на частные производные функции $F(t)$. Особую роль при этом играет производная $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t_0}$.

$$(z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F} = ze^{-\partial_0 D(z)F} - \xi e^{-\partial_0 D(\xi)F},$$
$$(\bar z-\bar\xi)e^{\bar D(\bar z)\bar D(\bar\xi)F} = \bar z e^{-\partial_0 \bar D(\bar z)F} - \bar\xi e^{-\partial_0 \bar D(\bar\xi)F},$$
$$1 - e^{-D(z)\bar D(\bar\xi)F} = \frac{1}{z\bar\xi}e^{\partial_0(\partial_0 + D(z)+\bar D(\bar\xi))F}.$$

Ее решениями являются функции $F(t)$ от бесконечного числа переменных $t = (t_0, t_1, \bar t_1, t_2, \bar t_2, \dots)$, удовлетворяющие этим дифференциальным уравнениям для любых пар комплексных чисел (z, ξ).

Теорема 2.6. *Функция $F(t)$ удовлетворяет двумерной бездисперсионной цепочке Тоды. Кроме того,*

$$w(z,t) = z\exp((-\frac{1}{2}\partial_0^2 - \partial_0 D(z))F(t)).$$

Proof. Используя теоремы 2.3 и 2.5, находим, что

$$\ln\left|\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar w(\xi)}\right| = 2\pi G_Q(z,\xi) = \ln\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{\xi}\right| + \frac{1}{2}\nabla(z)\nabla(\xi)F.$$

Умножая на 2, получаем

$$h = \ln\left|\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar w(\xi)}\right|^2 - \ln\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{\xi}\right|^2 - \nabla(z)\nabla(\xi)F = 0.$$

Переходя к пределу $\xi\to\infty$, находим $-\ln|w(z)|^2 + \ln|z|^2 = \partial_0\nabla(z)F$. Откуда

$$\ln(p) = \lim_{z\to\infty}\ln\left|\frac{w(z)}{z}\right| = -\frac{1}{2}\partial_0^2 F.$$

Раскладывая h в сумму h_1+h_2 голоморфной, антиголоморфной и постоянной части по z, находим, что функции

$$h_1 = \ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar w(\xi)}\right) - \ln\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\xi}\right) - D(z)\nabla(\xi)F$$

и

$$h_2 = \ln\left(\frac{\bar w(z)-\bar w(\xi)}{1-\bar w(z) w(\xi)}\right) - \ln\left(\frac{1}{\bar z}-\frac{1}{\bar\xi}\right) - \bar D(\bar z)\nabla(\xi)F$$

не зависят от z.

Переходя к пределу $z\to\infty$, находим, что

$$h_1 = \ln\left(-\frac{1}{\bar w(\xi)}\right) - \ln\left(-\frac{1}{\xi}\right), \quad h_2 = \ln\left(-\frac{1}{w(\xi)}\right) - \ln\left(-\frac{1}{\bar\xi}\right).$$

Приравнивая два выражения для h_1, находим, что

$$D(z)\nabla(\xi)F = \left(\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar w(\xi)}\right) - \ln\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\xi}\right)\right) - \left(\ln\left(-\frac{1}{\bar w(\xi)}\right) - \ln\left(-\frac{1}{\xi}\right)\right) =$$

$$\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\times\frac{-z\bar{w}(\xi)}{z-\xi}\right)=\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right)+\ln\left(\frac{\frac{z}{w(z)}}{\frac{1}{-w(z)\bar{w}(\xi)}+1}\right).$$

Переход к пределу $\xi\to\infty$ дает

$$D(z)\partial_0 F=\ln(p)+\ln\left(\frac{z}{w(z)}\right).$$

Сопоставляя с $\ln(p)=-\frac{1}{2}\partial_0^2F$, находим $\ln\left(\frac{w(z)}{z}\right)=-\frac{1}{2}\partial_0^2F-D(z)\partial_0F$, что эквивалентно

$$w(z,t)=zexp((-\frac{1}{2}\partial_0^2-\partial_0D(z))F(t)).$$

Голоморфная по ξ часть равенства $D(z)\nabla(\xi)F=\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right)+\ln\left(\frac{\frac{z}{w(z)}}{\frac{1}{-w(z)\bar{w}(\xi)}+1}\right)$ дает

$$-D(z)\partial_0F=D(z)D(\xi)F-\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right)-\ln\left(\frac{z}{w(z)}\right)=D(z)D(\xi)F+$$

$$\ln(z-\xi)+\ln\left(\frac{w(z)}{w(z)-w(\xi)}\right)-\ln z$$

, то есть

$$ze^{-\partial_0D(z)F}=(z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F}\frac{w(z)}{w(z)-w(\xi)}.$$

Меняя местами z и ξ, находим

$$\xi e^{-\partial_0D(\xi)F}=(\xi-z)e^{D(z)D(\xi)F}\frac{w(\xi)}{w(\xi)-w(z)}=(z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F}\frac{w(\xi)}{w(z)-w(\xi)}.$$

Таким образом,

$$ze^{-\partial_0D(z)F}-\xi e^{-\partial_0D(\xi)F}=(z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F}.$$

Заменяя (z,ξ) на $(\bar{z},\bar{\xi})$, находим равенство

$$\bar{z}e^{-\partial_0\bar{D}(\bar{z})F}-\bar{\xi}e^{-\partial_0\bar{D}(\bar{\xi})F}=(\bar{z}-\bar{\xi})e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\xi})F}.$$

Голоморфная относительно $\bar{\xi}$ часть равенства $D(z)\nabla(\xi)F=\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right)+\ln\left(\frac{\frac{z}{w(z)}}{\frac{1}{-w(z)\bar{w}(\xi)}+1}\right)$ дает

$$D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F=-\ln\left(1-\frac{1}{w(z)\bar{w}(\xi)}\right),$$

откуда

$$e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F}=1-\frac{1}{w(z)\bar{w}(\xi)}.$$

Подставляя сюда $w(z,t)=z\exp((-\frac{1}{2}\partial_0^2-\partial_0D(z))F(t))$, находим

$$1-e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F}=\frac{1}{z\bar{\xi}}e^{\partial_0(\partial_0+D(z)+\bar{D}(\bar{\xi}))F}.$$

□

Задача 2.12. * *Доказать, что*

$$\nabla(z)F = v_0 + 2Re\frac{v_k}{k}z^{-1},$$

где

$$v_0 = \partial_0 F = \frac{2}{\pi}\iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q^t} \ln|z| d^2 z, \qquad v_k = \frac{\partial}{\partial t_k}F = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q^t} z^k d^2 z$$

Второе утверждение теоремы 2.6 сводит проблему построения конформного отображения $w(z,t) : Q^t \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \Lambda$ к проблеме явного вычисления функции F как аналитической функции переменных $t = (t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, \dots)$. Функция $F(t)$ представляет и большой самостоятельный интерес. Она независимо возникает в современных моделях математической физики (матричные модели, топологическая гравитация и др.), где также требуется ее представление в виде ряда Тейлора. Интегральная формула для F не позволяет, к сожалению, найти это разложение.

Положение спасает первое утверждение теоремы 2.6 о том, что функция F является решением двумерной бездисперсионной цепочки Тоды. Чтобы искать решения этой системы надо сначала исключить из нее числа z, $\bar{z}$, ξ, $\bar{\xi}$. Для этого надо разложить функции, участвующие в уравнениях в ряды Лорана, по z, $\bar{z}$, ξ, $\bar{\xi}$. В качестве коэффициентов этих рядов выступают полиномы от частных производных функции F. Равенство коэффициентов при одинаковых мономах для правых и левых частей уравнений дает счетную систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Удивительным образом оказывается, что эта система имеет единственное решение F, такое что $\exp((-\frac{1}{2}\partial_0^2 - \partial_0 D(z))F(t)) = \sqrt{t_0}$ при $t = (t_0, 0, 0, \dots)$. Более того, эти дифференциальные уравнения позволяют найти нужное нам представление функции F в виде формального ряда

$$F(t) = \frac{1}{2}t_0^2 \ln t_0 - \frac{3}{4}t_0^2 + \sum N_i \left(\begin{array}{c} i_1, \dots, i_k | \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{\bar{k}} \\ n_1, \dots, n_k | \bar{n}_1, \dots, \bar{n}_{\bar{k}} \end{array} \right) t_0^{i-(n_1+\dots+n_k+\bar{n}_1+\dots+\bar{n}_{\bar{k}})+2} t_{i_1}^{n_1} \dots t_{i_k}^{n_k} \bar{t}_{\bar{i}_1}^{\bar{n}_1} \dots \bar{t}_{\bar{i}_{\bar{k}}}^{\bar{n}_{\bar{k}}},$$

где сумма берется по $k, \bar{k}, n_r, \bar{n}_r \geqslant 1, 0 < i_1 < \dots < i_k, 0 < \bar{i}_1 < \dots < \bar{i}_{\bar{k}}$, $i - (n_1 + \dots + n_k + \bar{n}_1 + \dots + \bar{n}_{\bar{k}}) + 2 \geqslant 0$. Более того, для коэффициентов $N_i \left(\begin{array}{c} i_1, \dots, i_k | \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{\bar{k}} \\ n_1, \dots, n_k | \bar{n}_1, \dots, \bar{n}_{\bar{k}} \end{array} \right)$ удается найти эффективные рекуррентные формулы (см. "Annals of Global Analysis and Geometry" №28 (2005) pp.233-255)

Для тех t, для которых этот формальный ряд сходится, теорема 2.6 позволяет явно найти конформное отображение односвязной области Q с гармоническими моментами Джеферсона t в стандартную область $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Lambda$.

3. Теорема об униформизации

Здесь представлен материал лекций, посвященных доказательству следующей классической теоремы об униформизации.

Теорема 3.1. *(А.Пуанкаре, П.Кёбе, 1908 г.) Всякая односвязная риманова поверхность конформно-эквивалентна либо единичному диску $D_1 = \{|z| < 1\}$, либо комплексной прямой $\mathbb{C}$, либо сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$.*

В лекциях мы докажем главную часть теоремы об униформизации относящуюся к некомпактному случаю и состоящую в следующем.

Теорема 3.2. *Всякая некомпактная односвязная риманова поверхность конформно-эквивалентна либо единичному диску, либо комплексной прямой* $\mathbb{C}$.

Упражнение 3.1. *Вывести общую Теорему 3.1 об униформизации из Теоремы 3.2, зная, что всякая компактная односвязная поверхность гомеоморфна сфере.*

3.1. **План доказательства теоремы 3.2. Метод доказательства теоремы 3.2:** построение **функции Грина.**

Основан на следующем элементарном предложении.

Предложение 3.1. *Пусть S – некомпактная односвязная риманова поверхность. Пусть $q \in S$, и пусть существует функция $G(p,q)$, гармоническая по $p \in S \setminus q$, такая что $G(p,q) \to 0$ при $p \to \partial S$ и в локальной карте в окрестности точки q имеющая вид*

$$G(p,q) = -\ln|p-q| + u(p), \tag{1}$$

где $u(p)$ – гармоническая функция в окрестности точки q. Тогда поверхность S конформно-эквивалентна единичному диску.

Proof. Напомним, что всякая гармоническая функция локально является вещественной частью голоморфной функции, и последняя определена однозначно с точностью до аддитивной константы. Тем самым, в окрестности каждой точки проколотой поверхности $S \setminus q$ существует голоморфная функция $\phi_q(p)$, такая что $G(p,q) = \operatorname{Re}\phi_q(p)$. Фиксируем некоторую локально определенную функцию ϕ_q. Она аналитически продолжается вдоль любого пути в $S \setminus q$, и результат продолжения зависит только от класса гомотопии пути с фиксированными концами. Фундаментальная группа проколотой поверхности $S \setminus q$ порождена обходом вокруг прокола q и изоморфна $\mathbb{Z}$. В окрестности точки p имеем $\phi_q(p) = -\ln(p-q) + h(p)$, $h(p)$ – голоморфная функция в окрестности точки q, в силу формулы (1). Следовательно, при продолжении функции ϕ_q вдоль замкнутого пути, обходящего точку q, продолженная ветвь отличается от начальной прибавлением $\pm 2\pi i$, как и для функции $-\ln z$. Взятие экспоненты убивает последнюю добавку. Тем самым, функция

$$F_q(p) = e^{-\phi_q(p)}$$

голоморфна на всей поверхности S. Имеем

$$|F_q(p)| = e^{-G(p,q)}.$$

В частности, функция $F_q(p)$ имеет единственный и простой нуль в точке q, и ее модуль стремится к 1 при $p \to \partial S$. Следовательно, функция $F_q(p)$ задает (разветвленное) накрытие $S \to D_1$. Его степень равна 1, в силу единственности и простоты нуля. Итак, $F_q : S \to D_1$ – конформный изоморфизм. Предложение доказано. □

Для доказательства теоремы 3.2 мы построим функцию $G(p,q)$, такую как в предыдущем предложении, только удовлетворяющую более слабому граничному условию (так называемую функцию Грина). Она строится как верхняя грань подходящего семейства субгармонических функций. Соответствующий подготовительный материал о субгармонических функциях будет напомнен позднее. Мы покажем (Лемма 3.1), что если функция Грина существует, то поверхность S конформно-эквивалентна области в D_1, и следовательно, диску, по теореме Римана о конформном отображении. Главная часть доказательства – это теорема 3.4, утверждающая, что функция Грина всегда существует на компактной области в римановой поверхности с гладкой границей. Поверхность S исчерпывается компактными областями $\Omega_j \subset S$ с гладкими границами. На каждой из последних существует однолистная голоморфная функция $f_j : \Omega_j \to \mathbb{C}$, в силу Леммы 3.1. Далее после подходящего выбора нормировки последних функций доказывается, что их некоторая подпоследовательность сходится к однолистной функции $S \to \mathbb{C}$. Это выводится стандартным рассуждением о нормальных семействах голоморфных функций.

Определение 3.1. *Пусть S – связная риманова поверхность, $q \in S$. Обозначим через $\mathcal{P}_q$ семейство субгармонических функций $u(p)$ на $S \setminus q$ с компактным носителем в S, которые в локальных координатах в окрестности точки q имеют вид*

$$u(p) = -\ln|p-q| + v(p), \tag{2}$$

где $v(p)$ – субгармоническая функция в окрестности точки q. Для любого $p \in S \setminus q$ положим

$$G(p,q) = \sup_{u \in \mathcal{P}_q} u(p). \tag{3}$$

Пример 3.1. *Функция $u = 0$ принадлежит пространству $\mathcal{P}_q$: равенство (2) выполнено с $v(p) = \ln|p-q|$. Тем самым, $G(p,q) \geq 0$.*

Теорема 3.3. *Для любого $q \in S$ функция $G(p,q)$ либо тождественно равна $+\infty$, либо является гармонической функцией на $S \setminus q$, имеющей вид (1) в окрестности точки q.*

Определение 3.2. *В последнем случае функция $G(p,q)$ называется* **функцией Грина**, *и мы говорим, что функция Грина существует.*

Лемма 3.1. *Если на односвязной римановой поверхности S существует функция Грина для любого $q \in S$, то S конформно эквивалентна области в единичном диске.*

Теорема 3.4. *Пусть S – риманова поверхность, а $\Omega \Subset S$ – компактная область с гладкой границей, На области Ω существует функция Грина $G(p,q)$ для любого $q \in \Omega$.*

Все вышесформулированные теоремы и лемма будут доказаны позднее.

Proof. **Теоремы 3.2 по модулю Леммы 3.1 и Теорем 3.3, 3.4.** Рассмотрим исчерпание некомпактной односвязной римановой поверхности S односвязными компактными областями Ω_j с гладкими границами:

$$\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \cdots = S.$$

Фиксируем точку $O \in \Omega_1$ и локальную карту в ее окрестности. Существуют однолистные функции $\phi_j : \Omega_j \to \mathbb{C}$, конформно отображающие области Ω_j на односвязные области в D_1 (Теорема 3.4 и Лемма 3.1). Нормируем функции ϕ_j так, чтобы

$$\phi_j(O) = 0;\ \phi_j'(O) = 1.$$

Функции ϕ_j голоморфны на возрастающих областях, исчерпывающих поверхность S. Утверждается, что существует подпоследовательность, сходящаяся равномерно на компактных подмножествах. Действительно, для любого фиксированного j и всех $k > j$ рассмотрим композиции

$$\psi_k = \phi_k \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(\Omega_j) \to \mathbb{C}.$$

Область Ω_j конформно-эквивалентна единичному диску (теорема Римана). Применение соответствующего конформного изоморфизма, переводящего 0 в O, превращает отображения ψ_k в однолистные функции

$$\psi_k : D_1 \to \mathbb{C},\ \psi_k(0) = 0,\ c_j < |\psi_k'(0)| < d_j,$$

где $c_j, d_j > 0$ – константы зависящие только от j и не зависящие от k. Можно выбрать подпоследовательность ψ_{k_r}, равномерно сходящуюся на компактных подмножествах, так как семейство нормированных однолистных функций на диске нормально: из любой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Это означает, что последовательность ϕ_{k_r} равномерно сходится на компактных подмножествах в Ω_j. Применяя это построение к каждой области Ω_j и выбирая диагональную последовательность, получаем последовательность функций ϕ_{s_r}, равномерно сходящуюся на компактных подмножествах в S. Ее предел есть однолистное голоморфное отображение $\Phi : S \to \mathbb{C}$, по построению. Тем самым, риманова поверхность S конформно-эквивалентна области $\Phi(S) \subset \mathbb{C}$. Это вместе с теоремой Римана о конформном отображении доказывает теорему 3.2. □

3.2. **Подготовительный материал: субгармонические функции.** Чтобы сформулировать определение функции Грина, напомним вначале определение субгармонической функции.

Определение 3.3. *Пусть V – область в $\mathbb{C}$. Непрерывная функция $u : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ называется субгармонической, если для любых $z \in V$ и замкнутого диска радиуса r с центром z, содержащегося в V, значение функции в центре не больше ее среднего по его границе:*

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi r} \oint_{\{|z-\zeta|=r\}} u(\zeta) ds; \ ds \text{ – элемент длины окружности.} \tag{4}$$

Пример 3.2. *Всякая гармоническая функция является субгармонической. Функция $\ln|z|$ гармонична на проколотой комплексной прямой $\mathbb{C}^*$ и субгармонична на всей комплексной прямой, включая нуль.*

Замечание 3.1. *Непрерывная функция $u(z)$ гармонична, если и только если предыдущее неравенство превращается в равенство (теорема о среднем). Функция класса C^2 субгармонична, если и только если ее лапласиан не отрицателен.*

Теорема 3.5. *(Принцип Максимума). Всякая непостоянная функция, субгармоническая в области и непрерывная в ее замыкании, достигает максимума на границе и не может достигать локального максимума внутри области.*

Теорема сразу следует из неравенства (4).

Следствие 3.1. *Непрерывная функция $u : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ на области $V \subset \mathbb{C}$ субгармонична, если и только если для любой области $W \Subset V$ с компактным замыканием выполнено следующее. Пусть v – решение задачи Дирихле: функция, гармоническая в области W и непрерывная на ее замыкании, такая что $v|_{\partial W} \equiv u_{\partial W}$.*

Тогда для любого $z \in W$ выполнено неравенство $u(z) \leq v(z)$. (Это и объясняет термин "субгармоническая".)

Proof. Пусть u – субгармоническая. Пусть W и v – такие, как выше. Функция $u - v$ субгармонична в области W и обращается в нуль на ее границе. Следовательно, она не положительна в W (Принцип Максимума), т.е. $u \leq v$ в W. Обратно, пусть для любой области W функция u не превосходит соответствующего решения v задачи Дирихле. Применяя это утверждение к произвольному диску с центром в любой точке z, получаем $u(z) \leq v(z)$. Правая часть $v(z)$ равна среднему функции u по границе диска, так как функция v гармонична и совпадает с u на границе (теорема о среднем для гармонических функций). А это и означает выполнение неравенства (4), и тем самым, функция u субгармонична. Следствие доказано. □

Следствие 3.2. *Понятие субгармоничности функции инвариантно относительно голоморфных замен координат (как и понятие гармонической функции). Это дает возможность определить субгармонические функции на произвольной римановой поверхности.*

3.3. **Доказательство Леммы 3.1.** Приведенное ниже доказательство следует рассуждениям из статьи [8]. Пусть на односвязной римановой поверхности S существует функция Грина $G(p, q)$ для любого $q \in S$. Для всякого $q \in S$ существует голоморфная функция

$$F_q(p) : S \to \mathbb{C}, \ |F_q(p)| \equiv e^{-G(p,q)},$$

которая строится так же, как и в доказательстве Предложения 3.1. Имеем $|F_q(p)| \leq 1$, так как $G(p, q) \geq 0$ и в силу предыдущей формулы. Итак, $F_q(S) \subset D_1$. В отличие от доказательства Предложения 3.1, функция Грина $G(p, q)$, a priori, не обязана стремиться к нулю при $p \to \partial S$, и соответствующий аргумент, доказывающий однолистность функции $F_q(p)$, не работает. Однако оказывается, что можно доказать однолистность, сравнивая отображения F_q для различных q, используя определение функции Грина, нулевые граничные условия для функций из пространства $\mathcal{P}_q$ и Принцип Максимума для субгармонических функций. Ключевым утверждением, используемым при доказательстве, является следующее предложение.

Предложение 3.2. *Пусть S – риманова поверхность, $q \in S$, и пусть существует функция Грина $G(p, q)$. Тогда для любой голоморфной функции $F : S \to D_1$, имеющей простой нуль в точке q, имеет место неравенство*

$$\ln |F(p)| \leq -G(p, q). \tag{5}$$

Proof. Для любой функции $u \in \mathcal{P}_q$ функция $L(p) = \ln |F(p)| + u(p)$ субгармонична на всей поверхности S. Субгармоничность в проколотой поверхности $S \setminus q$ очевидна. Субгармоничность в окрестности точки q следует из того, что в локальной карте $u(p) = -\ln |p - q| + v(p)$, где функция v – субгармонична, а $\ln |F(p)| = \ln |p - q| + h(p)$, где функция $h(p)$ – гармонична, так как F имеет простой нуль в точке q. Тем самым, логарифмы сокращаются, и функция $L(p) = h(p) + v(p)$ субгармонична. В окрестности границы ∂S имеем $L \leq 0$, так как $u = 0$ вблизи границы и $|F| < 1$. Следовательно, $L(p) = \ln |F(p)| + u(p) \leq 0$, по Принципу Максимума. Беря верхнюю грань по всем $u \in \mathcal{P}_q$, получаем неравенство (5). Предложение доказано. □

Для любых $q_1 \neq q_2 \in S$ мы применим предложение к функции

$$\phi(p) = \frac{F_{q_1}(p) - F_{q_1}(q_2)}{1 - \overline{F_{q_1}(q_2)} F_{q_1}(p)}.$$

Имеем $|\phi(p)| < 1$, так как значение $\phi(p)$ получается из $F_{q_1}(p) \in D_1$ применением дробно-линейного преобразования с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -F_{q_1}(q_2) \\ -\overline{F_{q_1}(q_2)} & 1 \end{pmatrix},$$

тем самым, являющегося автоморфизмом единичного диска. Далее

$$\phi(q_2) = 0,\ \phi(q_1) = -F_{q_1}(q_2).$$

Следовательно,

$$\ln|\phi(p)| \leq -G(p, q_2) = \ln|F_{q_2}(p)|, \tag{6}$$

в силу неравенства (5) с $F = \phi$, $q = q_2$. Подставляя $p = q_1$, получаем $|F_{q_1}(q_2)| \leq |F_{q_2}(q_1)|$ для любых $q_1 \neq q_2$, Значит, $|F_{q_1}(q_2)| = |F_{q_2}(q_1)|$ для любых [1] $q_1 \neq q_2$, по симметрии. Итак, функция $\frac{\phi(p)}{F_{q_2}(p)}$ голоморфна на всей поверхности, имеет модуль не больше единицы и принимает значение, равное 1 по модулю в точке q_1. Значит, она постоянна по Принципу Максимума, и $\phi(p) \equiv F_{q_2}(p)$ с точностью до мультипликативной константы. Тем самым, функция $\phi(p)$ обращается в нуль только в точке q_2. Это означает, что $F_{q_1}(p) = F_{q_1}(q_2)$, если и только если $p = q_2$, по определению. Последнее утверждение, справедливое при любом $q_2 \in S$, эквивалентно инъективности отображения F_{q_1}. Итак, отображение $F_{q_1} : S \to D_1$ голоморфно и инъективно. Лемма 3.1 доказана.

3.4. **Построение функции Грина методом Перрона.** Мы вывели Теорему об униформизации из Теорем 3.3 и 3.4 о существовании функции Грина. Здесь мы докажем Теоремы 3.3 и 3.4 с помощью построения функции Грина методом Перрона, который показывает, что верхняя грань подходящего семейства субгармонических функций существует и либо равна $+\infty$, либо является гармонической функцией. Его упрощенный линейный вариант – это преобразование выпуклой функции на области в линейную с помощью последовательных линейных срезов ее графика. Метод Перрона основан на следующих свойствах субгармонических функций. Приведенные ниже доказательства следуют рассуждениям из [9, 11].

Предложение 3.3. *Если функции f и g субгармоничны, то $h = \max\{f, g\}$ – тоже.*

Proof. Неравенство о среднем для каждой из функций влечет неравенство о среднем для максимума:

$$f(z) \leq \frac{1}{2\pi r} \oint_{|\zeta - z| = r} f(\zeta) \leq \frac{1}{2\pi r} \oint_{|\zeta - z| = r} h(\zeta),$$

аналогичное неравенство справедливо и для $g(z)$, а следовательно, и для $h(z) = \max\{f(z), g(z)\}$. □

Предложение 3.4. *Пусть f – субгармоническая функция в области V на римановой поверхности, и пусть $D \subset V$ – замкнутый координатный диск. Пусть*

[1] Это доказывает симметричность функции Грина

$\tilde f$ – гармоническая функция в D, непрерывная в замыкании $\overline{D}$ и совпадающая с f на границе. Тогда функция

$$f_D(z) = \begin{cases} f(z), \ \text{при } z \notin D, \\ \tilde f(z) \text{ при } z \in D \end{cases}$$

субгармонична в области V.

Proof. Неравенство о среднем для функции f_D выполнено вне замкнутого диска $\overline{D}$ и является равенством внутри его. Неравенство о среднем для $z \in \partial D$ и малого $r > 0$ следует из неравенства о среднем для субгармонической функции f и из того, $f(z) = \tilde f(z)$ и $f \le \tilde f$. □

Определение 3.4. *Семейство $\mathcal{P}$ субгармонических функций на римановой поверхности S называется семейством Перрона, если выполнено следующее:*
1) если $u_1, u_2 \in \mathcal{P}$, то $\max\{u_1, u_2\} \in \mathcal{P}$;
2) если $u \in \mathcal{P}$, то $u_D \in \mathcal{P}$ для всякого замкнутого координатного диска $\overline{D} \subset S$.

Пример 3.3. *Рассмотрим ранее введенное семейство $\mathcal{P}_q$ субгармонических функций на проколотой римановой поверхности $S\backslash q$ с компактным носителем в S, имеющих следующий вид в координатной окрестности точки q:*

$$u(q) = -\ln|p - q| + v(p),$$

где v – субгармоническая функция в (непроколотой) окрестности точки q. Семейство $\mathcal{P}_q$ является семейством Перрона.

Теорема 3.6. *Пусть $\mathcal{P}$ – семейство Перрона. Тогда функция*

$$s_{\mathcal{P}}(x) = \sup_{u \in \mathcal{P}} u(x)$$

либо гармонична на всей поверхности, либо тождественно равна $+\infty$.

Proof. **Теоремы 3.3 по модулю Теоремы 3.6.** Пусть для данной точки q функция $G(p, q)$ не равна тождественно $+\infty$. Тогда она гармонична на $S \setminus q$, по Теореме 3.6 и так как $\mathcal{P}_q$ – семейство Перрона. В координатной окрестности точки q суммы $u(p) + \ln|p - q|$, $u \in \mathcal{P}_q$ субгармоничны и также образуют семейство Перрона, как и функции u. Следовательно, их поточечная верхняя грань $v(p)$ гармонична в непроколотой окрестности точки q и удовлетворяет равенству (1). Теорема 3.3 доказана. □

Положим

$$D_r = \{|z| < r\} \subset \mathbb{C}; \ D_r(z) = \{|\zeta - z| < r\} \subset \mathbb{C}.$$

Теорема 3.6 будет ниже выведена из следующих элементарных свойств гармонических функций.

Теорема 3.7. (Харнак). *Существует функция $c = c(r) > 1$, зависящая от $0 < r < 1$, $c(r) \to 1$ при $r \to 0$, удовлетворяющая следующему утверждению. Пусть u – неотрицательная функция, гармоническая в единичном диске D_1 и непрерывная на его замыкании. Тогда*

$$c^{-1}(r) \le \sup_{z_1, z_2 \in \overline{D_r}} \frac{u(z_2)}{u(z_1)} \le c(r). \tag{7}$$

Proof. Значение функции u в точке $z \in D_1$ находится по формуле Пуассона: оно равно интегралу по ∂D_1 от произведения ее ограничения на границу $u|_{\partial D_1}$ и ядра Пуассона, не зависящего от u. Последнее есть функция двух переменных $z \in D_1$ и $\zeta \in \partial D_1$, равномерно ограниченная и равномерно отделенная от нуля функциями от r при $z \in \overline{D_r}$, равномерно по ζ стремящаяся к 1 при $z \to 0$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Следствие 3.3. *Всякое семейство неотрицательных гармонических функций в единичном диске, равномерно ограниченное в некоторой заданной точке диска, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на компактных подмножествах.*

Proof. Если значения функций ограничены в некоторой заданной точке диска, то они равномерно ограничены на компактных подмножествах, по теореме Харнака. Пусть $c(r)$ – функция из теоремы Харнака, Напомним, что $c(r) \to 1$ при $r \to 0$. Это вместе с (7) и равномерной ограниченностью значений функций в нуле означает, что $u(z) - u(0) \to 0$ равномерно по всем функциям u рассматриваемого семейства при $z \to 0$. Равностепенная непрерывность семейства в нуле доказана. Равностепенная непрерывность в любой другой точке $z \in D_1$ и на компактных подмножествах в D_1 сводится к предыдущему утверждению с помощью применения конформного автоморфизма единичного диска, переводящего z в 0. □

Следствие 3.4. *Поточечный предел всякой неубывающей последовательности гармонических функций либо является гармонической функцией, либо тождественно равен $+\infty$.*

Proof. Пусть $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ – рассматриваемая последовательность гармонических функций. Обозначим

$$s(z) = \lim_{j \to \infty} u_j(z),$$

предел существует в силу монотонности. Без ограничения общности считаем, что функции определены на замкнутом единичном диске и не отрицательны, заменяя u_j на $u_j - u_1$. А тогда если значения функций ограничены в какой-то точке $z \in D_1$, то функции равномерно ограничены на компактных подмножествах и равностепенно непрерывны, в силу предыдущего следствия. В этом случае предел $s(z)$ ограничен на компактных подмножествах, и последовательность u_j сходится к нему равномерно на компактных подмножествах, в силу равностепенной непрерывности. Следовательно, функция $s(z)$ непрерывна и удовлетворяет равенству теоремы о среднем

$$s(z) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{|\zeta - z| = r} s(\zeta),$$

выполненному для гармонических функций u_j: мы можем перейти к пределу под знаком интеграла, например, по теореме о мажорированной монотонной сходимости. Значит, функция $s(z)$ гармонична. Следствие доказано. □

Proof. **Теоремы 3.6.** Пусть значение функции $s = s_{\mathcal{P}}$ конечно в некоторой точке $O \in S$, и пусть $\overline{D} \Subset S$ – произвольный координатный диск с центром в точке O. Покажем, что функция s гармонична на D. Фиксируем произвольную последовательность u^n функций из семейства $\mathcal{P}$, таких что $u^n(O) \to s(O)$ при $n \to \infty$. Без ограничения общности будем считать последовательность u^n поточечно неубывающей, заменяя ее на $\tilde{u}^n = \max\{u^1, u^2, \dots, n^n\}$. Функции u^n_D гармоничны в D, принадлежат семейству $\mathcal{P}$ и $u_D^n \geq u^n$, по определению. Тем самым, $u_D^n \leq s$, и $u_D^n(O) \to s(O) < +\infty$. Функции u_D^n образуют поточечно неубывающую последовательность, как и функции u_n. Значит, последовательность u_D^n равномерно сходится на компактных подмножествах в D к гармонической функции σ в диске D (Следствие 3.4). Мы утверждаем, что $s \equiv \sigma$ в диске D. Действительно, предположим противное: $s(z) > \sigma(z)$ для некоторого $z \in D$. Выберем последовательность $v^n \in \mathcal{P}$, такую что $v^n(z) \to s(z)$. Будем считать, что эта последовательность поточечно неубывает и $v^n \geq u^n$, заменяя ее на $\max\{v^1, \dots, v^n, u^1, \dots, u^n\}$. Тогда последовательность функций v_D^n поточечно не убывает и сходится равномерно на компактных подмножествах в D к функции ν, гармонической в D. Имеем

$$v_D^n \geq u_D^n,\ u_D^n(O) \to s(O) = \sigma(O),\ v_D^n(z) \to s(z) = \nu(z) > \sigma(z) \text{ при } n \to \infty.$$

Из первого неравенства следует, что $\sigma \leq \nu$, а также, что $v_D^n(O) \to \sigma(O)$, и тем самым, $\nu(O) = \sigma(O)$. Итак, гармоническая функция $\nu - \sigma$ в диске D неотрицательна, положительна в точке z и обращается в нуль в точке O. Полученное противоречие с Принципом Максимума доказывает, что $\sigma \equiv s$ в диске D, и тем самым, функция s гармонична в диске D. Множество M_∞ тех точек $z \in S$, в которых $s = +\infty$, – открыто. Это следует из вышедоказанного утверждения: во всяком координатном диске, содержащем хотя бы одну точку z, где $s(z) < +\infty$, функция s гармонична и тем самым, принимает конечные значения. Поэтому никакой координатный диск не может пересекать одновременно и M_∞, и его дополнение. Итак, множество тех точек z, где $s(z)$ – конечна, открыто, как и его дополнение, и на первом множестве функция s гармонична. Следовательно, одно из двух последних множеств совпадает со всей поверхностью S. Это доказывает Теорему 3.6. □

Теперь чтобы завершить доказательство Теоремы об униформизации, осталось доказать Теорему 3.4. Для этого мы вначале покажем, что задача Дирихле в дополнении области $\Omega \Subset S$ к координатному диску с центром q имеет решение с любыми непрерывными граничными условиями (следующая теорема). Затем мы докажем следующую лемму, утверждающую, что если функция Грина равна $+\infty$, то подходящая последовательность перемасштабированных функций из семейства $\mathcal{P}_q$ сходится к единице в равномерно на координатном кольце с центром q. Далее мы докажем Теорему 3.4 применением Принципа Максимума к разности функции из леммы и решения задачи Дирихле с нулевым граничным условием на $\partial\Omega$ и единичным граничным условием на границе диска.

Теорема 3.8. *Пусть $\Omega \Subset S$ – компактная область на римановой поверхности S с гладкой границей (ни S, ни Ω не обязаны быть односвязными). Для любой непрерывной функции $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ существует гармоническая функция $F : \Omega \to \mathbb{R}$, непрерывная на замыкании $\overline{\Omega}$ и совпадающая с f на границе.*

Proof. Обозначим

$$M = \max f;\ m = \min f.$$

Рассмотрим семейство $\mathcal{P}(f)$ субгармонических функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, таких что

$$\overline{\lim}_{z \to x} u(z) \leq f(x) \text{ для любого } x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Семейство $\mathcal{P}(f)$ не пусто, так как заведомо содержит функцию $u \equiv m$. Обозначим

$$F(p) = \sup_{u \in \mathcal{P}(f)} u(p),\ p \in \Omega.$$

Функция $F(p)$ гармонична в области Ω. Это следует из Теоремы 3.6 и из того, что $\mathcal{P}(f)$ – семейство Перрона, а его функции ограничены сверху константой M, по определению и по Принципу Максимума. Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{z\to x} F(z) = f(x) \text{ для любого } x \in \partial\Omega. \tag{9}$$

Для любой точки $x \in \partial\Omega$ выберем произвольно локальную карту в ее окрестности и последовательность точек $\zeta_n \in S \setminus \overline{\Omega}$, $\zeta_n \to x$ вдоль кривой, ортогональной прямой $T_x\partial\Omega$. Для любого малого $\varepsilon > 0$ и любого достаточно большого n (в зависимости от ε) положим

$$u_{n,\varepsilon}(z) = \max\{\ln|\frac{x-\zeta_n}{z-\zeta_n}| + f(x) - \varepsilon,\ m\};\ z \in \Omega.$$

Функция $u_{n,\varepsilon}$ принадлежит семейству $\mathcal{P}(f)$, и $u_{n,\varepsilon}(z) \to f(x) - \varepsilon$ при $z \to x$. Итак, для любых $x \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$ имеем $\underline{\lim}_{y\to x} u(y) \geq f(x) - \varepsilon$ для некоторой функции $u \in \mathcal{P}(f)$, а следовательно, и для $u = F$. Значит,

$$\underline{\lim}_{z\to x} F(z) \geq f(x) \tag{10}$$

для любого $x \in \partial\Omega$. Рассматривая аналогичное семейство $\mathcal{P}(-f)$, получаем гармоническую функцию $G(p)$, такую что

$$\underline{\lim}_{z\to x} G(z) \geq -f(x). \tag{11}$$

Имеем $u + v \leq 0$ для любых $u \in \mathcal{P}(f)$, $v \in \mathcal{P}(-f)$, по определению, см. (8). Следовательно, $F + G \leq 0$. С другой стороны, $F + G \geq 0$, в силу (10), (11) и Принципа Максимума. Тем самым, $F \equiv -G$, и неравенства (10) и (11) нижних пределов являются равенствами. Итак, $\underline{\lim}_{z\to x} F(z) = f(x)$, $\underline{\lim}_{z\to z} G(z) = -f(x)$. Следовательно, $\overline{\lim}_{z\to x} F(z) \geq f(x)$. Последнее неравенство является равенством, так как в противном случае, $0 = \overline{\lim}_{z\to x}(F(z) + G(z)) \geq \overline{\lim}_{z\to x} F(z) + \underline{\lim}_{z\to x} G(z) > 0$, – противоречие. Это доказывает (9) и теорему. □

Лемма 3.2. *Пусть S, $\Omega \Subset S$ – такие, как в предыдущей теореме. Пусть $q \in \Omega$ – такая что сответствующая функция Грина $G(p, q)$ на области Ω равна $+\infty$. Пусть $0 < r < 2r < 1$, $D_1 = D_1(q) \Subset \Omega$ – координатный диск радиуса 1 с центром в точке q. Существует последовательность функций $u_n \in \mathcal{P}_q$, положим $M_n = \max_{\partial D_r} u_n$, таких что $M_n \to +\infty$ и*

$$\frac{u_n}{M_n} \to 1 \text{ равномерно на кольце } A_r = \overline{D}_{2r} \setminus D_r \text{ при } n \to \infty. \tag{12}$$

Proof. Положим $\Delta = D_1$. Для каждой неотрицательной функции $u \in \mathcal{P}_q$ положим

$$\tilde{u}(p) = u(p) + \ln|p - q|,\ \hat{u}(p) = -\ln|p - q| + \tilde{u}_\Delta(p).$$

Напомним, что функция $\tilde{u}$ субгармонична в Δ, а $\tilde{u}_\Delta$ – субгармонична в окрестности замкнутого диска $\overline{\Delta}$, совпадает с $\tilde{u}$ вне диска, а внутри диска функция $\tilde{u}_\Delta$ гармонична и $\tilde{u}_\Delta \geq u$. По определению,

$$\hat{u} \in \mathcal{P}_q,\ \hat{u} \geq u,\ \tilde{u}(p) = u(p) \geq 0 \text{ на границе } \partial\Delta.$$

Тем самым, $\tilde{u} \geq 0$ в диске Δ, по Принципу Максимума. Пусть $v_n \in \mathcal{P}_q$ – последовательность неотрицательных функций, стремящаяся к $+\infty$ в некоторой точке окружности ∂D_r. Докажем утверждение леммы для функций

$$u_n = \hat{v}_n.$$

Имеем $\tilde{v}_{n,\Delta}(p) = u_n(p) + \ln|p-q| \to +\infty$ равномерно на $\overline{D_{2r}}$, в силу гармоничности, теоремы Харнака и неравенства $\tilde{v}_{n,\Delta} \geq v_{n,\Delta}$. Тем самым, $u_n \to +\infty$ равномерно на диске $\overline{D_{2r}}$. Положим

$$M_n = \max_{\partial D_r} u_n,\ \chi_n = \frac{u_n}{M_n}, \psi_n(p) = \frac{\tilde{v}_{n,\Delta}(p)}{M_n} = \chi_n(p) + \frac{1}{M_n}\ln|p-q|.$$

Функции ψ_n гармоничны и не отрицательны в диске Δ, а их максимальные значения на окружности ∂D_r равны 1. Поэтому, они равностепенно непрерывны на компактах в Δ (Следствие 3.3) и переходя к подпоследовательности, можно считать, что ψ_n сходятся к неотрицательной гармонической функции ψ равномерно на компактах в Δ. Следовательно, $\chi_n(p) = \psi_n(p) + \frac{1}{M_n}\ln|p-q| \to \psi(p)$ равномерно на A_r, так как $M_n \to +\infty$. Пусть $\psi \not\equiv const$. Тогда максимум функции ψ на окружности ∂D_ν строго монотонно растет как функция от ν. Следовательно, для любого достаточно большого n выполнено неравенство $\max|_{\partial D_{2r}}\chi_n > \max|_{\partial D_r}\chi_n$. Это противоречит Принципу Максимума для функции $\chi_n = \frac{u_n}{M_n} \geq 0$, субгармонической на области $\Omega\setminus q \Supset \Omega\setminus D_r$ и равной нулю в окрестности границы $\partial\Omega$. Отсюда следует, что $\psi\equiv 1$. Лемма доказана. □

Proof. **Теоремы 3.4.** Предположим противное: $G(p,q) \equiv +\infty$ для некоторого $q\in\Omega$. Фиксируем единичный координатный диск $D_1 = D_1(q) \Subset \Omega$ с центром q, $0<r<2r<1$ и последовательность функций $u_n\in\mathcal{P}_q$ из предыдущей леммы. Пусть $F:\Omega\setminus D_r\to\mathbb{R}$ – гармоническая функция, непрерывная в замыкании $\overline{\Omega\setminus D_r}$, равная нулю на границе $\partial\Omega$ и равная 1 на границе ∂D_r. Функция F существует по Теореме 3.8. Фиксируем произвольное малое $\varepsilon>0$. Для любого достаточно большого n справедливо неравенство $\frac{u_n}{M_n} - F - \varepsilon \leq 0$, по Принципу Максимума, и так как оно справедливо на границе $\partial(\Omega\setminus D_r)$ по определению. Выбирая ε сколь угодно малым и переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем $1-F\leq 0$, т.е. $F\geq 1$ на кольце $A_r = \overline{D_{2r}}\setminus D_r$. С другой стороны, $F\leq 1$, по Принципу Максимума. Тем самым, $F\equiv 1$ на A_r, в то время, как $F|_{\partial\Omega}\equiv 0$ и функция F гармонична в области $\Omega\setminus\overline{D_r}$ и непрерывна в ее замыкании. Полученное противоречие доказывает Теорему 3.4 и завершает доказательство Теоремы об униформизации. □

4. Типы римановых поверхностей

4.1. **Автоморфизмы односвязных римановых поверхностей.** Голоморфный изоморфизм области $D\in\overline{\mathbb{C}}$ на себя называется *автоморфизмом* комплексной области D. Суперпозиция таких автоморфизмов задает на их множестве структуру группы $\mathsf{Aut}(D)$.

Согласно теореме униформизации, любая связная односвязная риманова поверхность биголоморфно эквивалентна сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или единичному диску $\Lambda = \{z\in\mathbb{C}||z|<1\}$.

Задача 4.1. *Докажите, что диск* Λ *биголоморфно эквивалентен верхней полуплоскости* $H = \{z\in\mathbb{C}|\mathtt{Im}(z)>0\}$

Задача 4.2. *Докажите, что* $\mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{z\mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}|a,b,c,d\in\mathbb{C}, ad-bc\neq 0\}$,

$$\mathsf{Aut}(\mathbb{C}) = \{z\mapsto az+b|a,b\in\mathbb{C}, a\neq 0\}$$

$$\mathsf{Aut}(\Lambda) = \{z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} | |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathsf{Aut}(H) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} | a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc > 0\}$$

Биголоморфные отображения сохраняют углы между пересекающимися кривыми на поверхности. Поэтому класс биголоморфной эквивалентности поверхности называются называется также *конформным типом* римановой поверхности.

Следствие 4.1. *Римановы поверхности $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ и H имеют различные конформные типы.*

4.2. **Униформизация римановых поверхностей.** .

Из топологии известно, что топологическое многообразие M с фундаментальной группой $\pi_1(M)$ гомеоморфно фактор поверхности W/Γ, где Γ дискретная группа топологических автоморфизмов M, действующая без неподвижных точек. Группа Γ называется *униформизирующимей группой.* Возникающий локальный гомеоморфизм $\varphi : W \to W/\Gamma \to M$ называется *униформизирующим отображением.*

Пусть теперь M — риманова поверхность с голоморфным атласом $\{(U_\alpha, z_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$. Униформизирующее отображение $\varphi : W \to M$ порождает семейство карт на W вида (V_β, z_β), где V_β — компонента связности множества $\varphi^{-1}(U_\alpha)$ и $z_\beta = z_\alpha\varphi$.

Задача 4.3. *Докажите, что совокупность карт $\{(V_\beta, z_\beta) | \beta \in \mathcal{B}\}$ образует голоморфный атлас и задает на W структуру римановой поверхности. Униформизирующая группа Γ состоит при этом из биголоморфных автоморфизмов римановой поверхности W. Конформный тип униформизирующей римановой поверхности W однозначно определяется конформным типом римановой поверхности M.*

Задача 4.4. *Докажите, что взаимно-однозначное отображение римановых поверхностей, сохраняющие углы между пересекающимися кривыми на поверхности является биголоморфным.*

Таким образом конформный тип риманова поверхность M однозначно определяется парой (W, Γ), где $W \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, H\}$ и Γ — дискретная подгруппа группы $\mathsf{Aut}(W)$.

Задача 4.5. *Докажите, что пары (W, Γ_1) и (W, Γ_2) задают биголоморфно эквивалентные поверхности, если и только если группы Γ_1 и Γ_2 сопряжены в* $\mathsf{Aut}(W)$.

Задача 4.5 сводит описание римановых поверхностей к описанию классов сопряженности, действующих без неподвижных точек дискретных подгрупп на односвязных униформизирующих поверхностях: сфере Римана, комплексной плоскости и единичном диске.

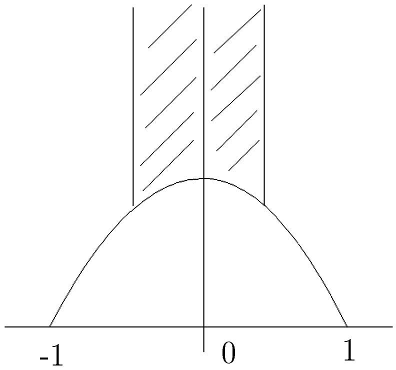
Задача 4.6. *Докажите, что все автоморфизмы сферы Римана имеют неподвижные точки. Докажите, что действующие без неподвижных точек дискретные группы автоморфизмов комплексной плоскости порождены одним или двумя параллельными переносами. Докажите, что фактор-поверхность $\mathbb{C}/\Gamma$ по группе Γ, порожденным произвольным параллельным переносом, изоморфна $\mathbb{C} \setminus 0$.*

Определение 4.1. *Дискретные группы автоморфизмов единичного диска Λ, а также дискретные группы автоморфизмов верхней полуплоскости H называются фуксовыми группами.*

Задача 4.7. *Доказать, что каждая фуксова группа или порождена одним элементом, или не коммутативна.*

Пример 4.1. *Следующая группа является фуксовой и называется классической модулярной группой* $\mathtt{Mod} = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} | a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1\} \cong PSL(2,\mathbb{Z})$.

Задача 4.8. *Найти образующие и фундаментальную область модулярной группы.* *Указание, рассмотреть следующую область:*



Подведем промежуточный итог.

Теорема 4.1. *Всякая риманова поверхность P изоморфна $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}\setminus 0$, тору $\mathbb{C}/\Gamma'$, где Γ' — группа, порожденная двумя не коллинеарными параллельными переносами, или риманова поверхности Λ/Γ, где $\Gamma \subset \mathsf{Aut}(\Lambda) \cong \pi_1(P,p)$ — фуксова группа, действующая без неподвижных точек.*

4.3. **Модули римановых поверхностей рода 1.** Далее мы будем рассматривать лишь римановы поверхности с конечнопорожденной фундаментальной группой. Компактные поверхности такого типа характеризуются родом ("числом ручек") g. Некомпактные получаются "выкидыванием" из компактных конечного числа связных односвязных поверхностей. Мы уже видели, что что удаление точки и диска приводят к римановым поверхностям существенно различного конформного типа.

Определение 4.2. *Риманову поверхность, получающуюся из компактной римановой поверхности рода g выкидыванием n дисков и m точек мы будем называть римановой поверхностью типа $\mathfrak{t} = (g,n,m)$. Униформизирующую ее группу мы будем называть группой типа $\mathfrak{t} = (g,n,m)$. Множество классов изоморфности $M_{\mathfrak{t}}$ римановых поверхностей типа $\mathfrak{t}$ называется пространством модулей римановых поверхностей типа $\mathfrak{t}$.*

Нашей главной задачей будет доказать, что множество $M_{g,k,m}$ имеет естественную структуру связного топологического пространства и описать его топологию.

Мы уже знаем, что каждое из множеств $M_{(0,0,0)}$, $M_{(0,1,0)}$, $M_{(0,0,1)}$ и $M_{(0,0,2)}$ состоит из одной точки. Что представляют из себя пространства модулей $M_{(0,2,0)}$ и $M_{(0,1,1)}$ мы обсудим позже. А сейчас докажем

Теорема 4.2. *Пространство модулей $M_{(1,0,0)}$ естественно отождествляется с пространством $H/\mathtt{Mod}$, где $\mathtt{Mod}$ — классическая модулярная группа.*

Proof. Фундаментальная группа двумерного тора P коммутативна и изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Согласно задачам 4.7 и 4.6 отсюда следует,что $\tilde{P} = \mathbb{C}/\Gamma$, где группа $\Gamma \subset \mathsf{Aut}\,\mathbb{C}$ порождена параллельными переносами T_{f_1}, T_{f_2} на непропорциональные векторы $f_1, f_2 \in \mathbb{C}$. Согласно задаче 4.5, можно считать, что $f_2 = 1$ и $\mathbf{Im} f_1 > 0$, (то есть $f_1 \in H$), причем пары векторов $(1, \tau)$ и $(1, \tau')$, где $\tau, \tau' \in H$ порождают изоморфные римановы поверхности если и только если они порождают сопряженные в $\mathsf{Aut}(\mathbb{C})$ группы параллельных переносов. Это означает, что для некоторого $k \in \mathbb{C}$ образующие $(k, k\tau')$ группы параллельных переносов выражаются через образующие $(1, \tau)$ группы параллельных переносов по формулам $k = c\tau + d$ и $k\tau' = a\tau + b$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathtt{SL}(2, \mathbb{Z})$. Таким образом, $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d} = \gamma\tau$, где $\gamma \in \mathtt{Mod}$. □

Задача 4.9. *Пространство модулей римановых поверхностей рода 1 имеет естественную комплексную структуру и изоморфно комплексной плоскости.*

5. Модули гиперболических римановых поверхностей.

5.1. **Геометрия верхней полуплоскости.** И так нам осталось рассмотреть римановы поверхности вида H/Γ, где $H = \{z \in \mathbb{C} | \mathbf{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость, а Γ — дискретная подгруппа группы $\mathsf{Aut}(H) = \{Az = \frac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0\} \cong \mathtt{PSL}(2, \mathbb{R})$, действующая на H без неподвижных точек.

Задача 5.1. *Доказать, что группа $\mathsf{Aut}(H)$ совпадает с группой изометрий метрики $ds = \dfrac{|dz|}{\boldsymbol{Im}(z)}$. Эта метрика задает на H модель Пуанкаре геометрии Лобачевского. Найдите прямые (т.е. геодезические) геометрии Лобачевского в этой модели.*

Эта метрика постоянной отрицательной кривизны называется *гиперболической.* Факторизация по дискретной группе, действующей без неподвижных точек, переносит метрику на фактор поверхность. Поэтому все римановы поверхности, униформизируемые H, называются *гиперболическими.*

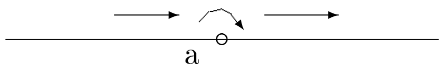
Задача 5.2. *Докажите, что риманова поверхность типа (g, n, m) — гиперболическая если и только если $6g - 6 + 3n + 2m > 0$*

Неподвижные точки автоморфизма $Az = \frac{az+b}{cz+d}$ A являются корнями z_1, z_2 уравнения $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. Автоморфизм A называется:

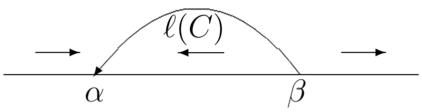
- *Эллиптическим*, если $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$. В этом случае $z_2 = \overline{z}_1$ и автоморфизм A имеет одну неподвижную точку в H.
  Пример: $A(z) = \frac{z+1}{-z+1}$.
- *Параболическим*, если $z_1 = z_2$. В этом случае $z_1 = z_2 \in \mathbb{R}$ и у автоморфизма A нет неподвижных точек на H, и лишь одна неподвижная точка на $\mathbb{R} \cup \infty$.
  Пример: $A(z) = z + b$.

- *Гиперболическим*, если $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{R}$. В этом случае у автоморфизма A также нет неподвижных точек на H, зато ровно две неподвижные точки на $\mathbb{R} \cup \infty$. *Пример:* $A(z) = \lambda z$.

Задача 5.3. *Доказать, что всякий параболический автоморфизм с неподвижной точкой* $a \in \mathbb{R}$ *сопряжен в группе* $\mathsf{Aut}(H)$ *с автоморфизмом* $z \mapsto z + 1$ *и имеет вид* $C(z) = \dfrac{(1 - a\gamma)z + a^2\gamma}{-\gamma z + (1 + a\gamma)}$. *Если* $\gamma > 0$, *то* $C(r) > r$. *В окрестности точки a такой автоморфизм действует как показано на рисунке.*



Задача 5.4. *Доказать, что всякий гиперболический автоморфизм* C *сопряжен в группе* $\mathsf{Aut}(H)$ *с автоморфизмом* $z \mapsto \lambda z, \lambda > 0$, *и имеет вид* $Cz = \dfrac{(\lambda a - \beta)z + (1 - \lambda)\alpha\beta}{(\lambda - 1)z + (\alpha - \lambda\beta)}$, *где число* $\lambda > 1$ *называется параметром сдвига* C, α *— неподвижная притягивающая и* β *— неподвижная отталкивающая точки автоморфизма* C. *Соединяющая их полуокружность* $\ell(C)$ *инвариантна относительно* C *(инвариантная прямая геометрии Лобачевского).*



Неподвижную точку $a(C)$ параболического автоморфизма C мы будем считать его инвариантной прямой и обозначать $\ell(C) = \alpha(C) = \beta(C) = a(C)$.

Задача 5.5. *Докажите, что порожденная параболическим автоморфизмом* C *риманова поверхность* $H/ < C >$ *изоморфна* $\Lambda \setminus 0$ *и не имеет замкнутых геодезических.*

Задача 5.6. *Докажите, что порожденная гиперболическим автоморфизмом* C *риманова поверхность* $H/ < C >$ *имеет единственную геодезическую, совпадающую с образом инвариантной прямой автоморфизма* C. *Эта геодезическая является простым, не гомотопным 0 контуром минимальной длины. Поверхности изоморфны, если и только если соответствующие длины минимальных геодезических равны.*

Задача 5.7. *Опишите пространства модулей* $M_{(0,2,0)}$ *и* $M_{(0,1,1)}$.

Задача 5.8. *Докажите, что число проколов гиперболической римановой поверхности* H/Γ *совпадает с числом классов сопряженности параболических элементов группы* Γ.

5.2. **Последовательные наборы автоморфизмов.** Перейдем теперь к описанию некоммутативных дискретных фуксовых групп, действующих без неподвижных точек. Эти группы удобно задавать с помощью систем образующих. Оказывается, что системы образующих можно выбрать таким образом, чтобы условие дискретности сводилось к условию на геометрию инвариантных прямых этих образующих.

Доказательство дискретности групп будет проходить по следующей схеме. Мы построим фундаментальные области, геометрия которых определяется геометрией инвариантных прямых образующих и докажем, что последовательность фундаментальных областей примыкающих к каждой вершине области реализует алгебраическое соотношение между образующими.

Для геометрических рассуждений удобно перейти от верхней полуплоскости H к диску $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$. Группа его голоморфных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ также распадается на эллиптические, параболические, гиперболические автоморфизмы, имеющие соответственно 0, 1, 2 неподвижных точек на абсолюте $\partial\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$. Биголоморфный изоморфизм $\varphi : H \to \Lambda$ переводит метрику на H в инвариантную относительно $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ метрику на Λ и инвариантные прямые сдвигов C в инвариантные прямые сдвигов $\varphi C \varphi^{-1}$.

Задача 5.9. *Доказать, что прямыми (т.е.геодезическими) этой метрики на Λ являются дуги окружностей, ортогональные $\partial\Lambda$.*

Определение 5.1. *Набор $\{C_1, C_2, C_3\} \in Aut(H)$ назовем последовательным, если он не содержит эллиптических автоморфизмов, $C_1 C_2 C_3 = 1$, а инвариантные прямые сдвигов расположены как на рис. 1.*

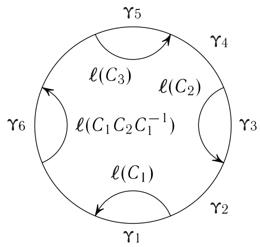


Рис. 1

Лемма 5.1. *Пусть $\{C_1, C_2, C_3\}$ — последовательный набор. Тогда набор $\{C_1 C_2 C_1^{-1}, C_1, C_3\}$ также последовательный.*

Proof. Неподвижные точки сдвигов C_i разбивают абсолют на 6 дуг γ_i, изображенных на рис. 1. Пусть α и β неподвижные притягивающая и отталкивающая точки сдвига $C_1 C_2 C_1^{-1}$. Тогда

$$\ell(C_1 C_2 C_1^{-1}) = C_1 \ell(C_2) \quad \text{откуда} \quad \beta \in \gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6.$$

С другой стороны,

$$C_1 \ell(C_2) = C_3^{-1} C_2^{-1} \ell(C_2) = C_3^{-1} \ell(C_2) \quad \text{откуда} \quad \beta \in \gamma_3 \cup \gamma_2 \cup \gamma_1 \cup \gamma_6.$$

Таким образом, $\beta \in \gamma_6$. Аналогично, $\alpha \in \gamma_6$. То есть $\{C_1 C_2 C_1^{-1}, C_1, \ C_3\}$ тоже последовательный набор. □

Лемма 5.2. *Последовательный набор $V = \{C_1, C_2, C_3\}$ порождает фуксову группу типа $(0, 3, 0)$, то есть Γ дискретная группа— и Λ/Γ — сфера с 3 дырами.*

Proof. Пусть r_i — пересекающий $\ell(C_i)$ геодезический луч с началом в точке O_i и концами в точке абсолюта. Тогда $d_i = C_i^{-1} r_i$ — геодезический луч с концом O_{i+1}. Лучи $\{r_i, d_i (i = 1, ..., n)\}$ ограничивают некомпактную область M на рис. 2).

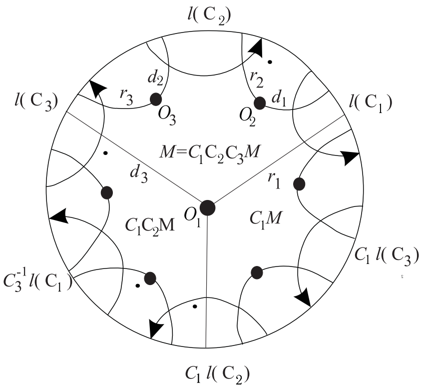


Рис. 2

Дуги $\ell(C_i)$ отсекают от M "хвосты" M_i, выходящие на границу $\partial\Lambda$. Взаимное расположение образов $C_j(M_i)$ этих "хвостов" $C_j(M_i)$ определяется взаимным расположением прямых $C_j(\ell(C_i))$. Расположение прямых $C_j(\ell(C_i))$ определяется, в свою очередь, леммой 5.1. Таким образом многоугольники M, C_1M, $C_1C_2M = C_3^{-1}M$, $C_1C_2C_3M = M$ расположены как на рис. 2 и реализуют однократный обход вокруг вершины O_1. Аналогично доказывается, что соотношение $C_1C_2C_3 = 1$ реализует также и однократный обход вокруг вершин O_2 и O_3. $\square$

Определение 5.2. *Набор $\{C_1, ..., C_n\}$, состоящий из гиперболических автоморфизмов $\{C_1, ..., C_k\}$ и параболических автоморфизмов $\{C_{k+1}, ..., C_n\}$, назовем последовательным набором типа $(0, k, n-k)$, если для любого $i = 1, ..., n-1$ наборы $\{C_1 \cdots C_{i-1}, C_i, C_{i+1} \cdots C_n\}$ последовательные.*

Задача 5.10. *Пусть $\{C_1, ..., C_n\} \in Aut(\Lambda)$ — последовательный набор. Докажите, что $\ell = C_jC_{j+1}...C_{n-1}C_n(\ell(C_1))$ лежит между $\ell(C_{j-1})$ и $\ell(C_j)$.*

Задача 5.11. *Модифицируя доказательство леммы 5.2 докажите, что последовательный набор $V = \{C_1, ..., C_n\} \subset Aut(\Lambda)$ типа $(0, k, m)$ порождает фуксову группу Γ типа $(0, k, m)$, то есть Γ — дискретная группа и Λ/Γ — сфера с k дырами и m проколами (см. рис. 3).*

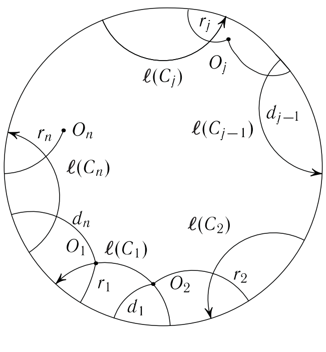


Рис. 3

Последовательным набором типа (g, k, m) назовем набор

$$\{A_1, B_1, ..., A_g, B_g, C_1, ..., C_n\}$$

такой, что $A_i, B_i \quad (i = 1, ..., g)$ — гиперболические автоморфизмы и

$$\{A_1, B_1A_1^{-1}B_1^{-1}, ..., A_g, B_gA_g^{-1}B_g^{-1}, C_1, ..., C_n\}$$

— последовательный набор типа $(0, 2g+k, m)$. Будем говорить, что фуксова группа $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Lambda)$ или $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(H))$ — это *фуксова группа типа* (g, k, m), если Λ/Γ (соответственно H/Γ) принадлежит $M_{g,k,m}$.

Теорема 5.1. *Последовательный набор типа (g, k, m) порождает фуксову группу Γ типа (g, k, m)*

Proof. Пусть $\{A_1, B_1, ..., A_g, B_g, C_{g+1}, ..., C_n\} \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$ — последовательный набор типа (g, m, k). При $g = 0$ утверждение следует из задачи 5.11. Пусть $g > 0$. Положим $C_i = [A_iB_i] \quad (i = 1, ..., g)$. Наши определения гарантируют расположение геодезических $\ell(A_i), \ell(B_i), \ell(C_i)$, показанное на рис. 4. Пусть $O_1 \in \ell(C_1)$ и M —

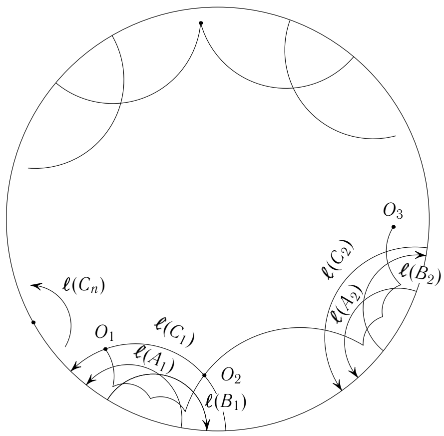


Рис. 4

фундаментальный многоугольник, из задачи 5.11. При $i \leqslant g$ заменим лучи r_i, d_i на геодезические сегменты с вершинами

$$O_{i+1}, \quad B_iA_i^{-1}B_i^{-1}O_{i+1}, \quad A_i^{-1}B_i^{-1}O_{i+1}, \quad B_i^{-1}O_{i+1}, \quad O_i = A_iB_iA_i^{-1}B_i^{-1}O_{i+1}.$$

В результате получим новый многоугольник $\tilde{M}$ (см. рис. 4). Используя те же аргументы, что и при доказательстве леммы 5.2, находим, что многоугольники

$$\tilde{M}, A_1\tilde{M}, A_1B_1\tilde{M}, A_1B_1A_1^{-1}\tilde{M}, C_1\tilde{M}, C_1A_2\tilde{M}, C_1A_2B_2\tilde{M},$$

$$C_1A_2B_2A_2^{-1}\tilde{M}, C_1C_2\tilde{M}, ..., C_1C_2 \cdots C_{n-1}M$$

реализуют обход вокруг точки O_1 и, следовательно, множество $\{A_1, ..., C_n\}$ порождает фуксову группу Γ. Легко проследить, что каждая пара (A_i, B_i) порождает ручку поверхности Λ/Γ. Поэтому Λ/Γ — поверхность типа (g, k, m). $\square$

5.3. **Геометрия фуксовых групп.** Пусть P — поверхность типа (g, k, m). Систему образующих

$$v = \{a_i, b_i(i = 1, ..., g), c_i(i = g+1, ..., n)\}$$

группы $\pi_1(P,p)$ назовем *стандартной*, если v порождает $\pi_1(P,p)$ с определяющим соотношением

$$\prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]\prod_{i=g+1}^{n}c_i=1$$

и представляется набором простых контуров

$$\tilde v=\{\tilde a_i,\tilde b_i(i=1,...,g),\tilde c_i(i=g+1,...,n)\}$$

со следующими свойствами:

- контур $\tilde c_i$ гомологичен 0 и отсекает от поверхности P одну дыру при $i\leqslant g+k$ и один прокол при $i>g+k$;
- $\tilde a_i\cap\tilde b_j=\tilde a_i\cap\tilde c_j=\tilde b_i\cap\tilde c_j=\tilde c_i\cap\tilde c_j=p$;
- в окрестности точки p контуры $\tilde v$ расположены как на рис. 5

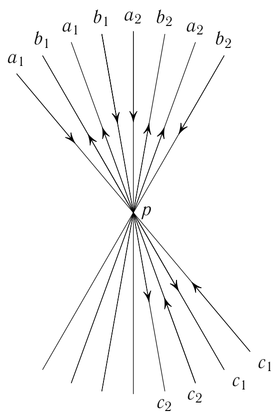


Рис. 5

В этом случае набор контуров $\tilde v$ расположен на P как показано на рис. 6

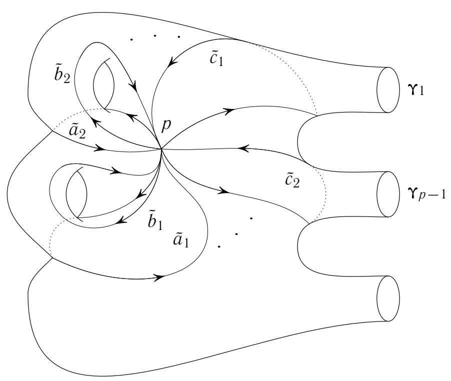


Рис. 6

Пусть теперь $\Gamma\subset\mathrm{Aut}(\Lambda)$ — фуксова группа, $P=\Lambda/\Gamma$, $\Phi:\Lambda\to P$ — естественная проекция и $q\in\Phi^{-1}(p)$. Сопоставим автоморфизму $C\in\Gamma$ ориентированный геодезический отрезок $\ell_q(C)\subset\Lambda$ с началом q и концом $C(q)$. Соответствие $C\mapsto\Phi(\ell_q(C))$ порождает изоморфизм $\Phi_q:\Gamma\to\pi_1(P,p)$.

Лемма 5.3. *Пусть* $V = \{A_i, B_i(i = 1, ..., g), C_i(i = g + 1, ..., n)\}$ *— последовательный набор типа* (g, k, m), Γ *— фуксова группа, которую он порождает, и* $P = \Lambda/\Gamma$. *Тогда* $v_q = \Phi_q(V)$ *— стандартная система образующих группы* $\pi_1(P, p)$.

Proof. Рассмотрим фундаментальную область M, построенную при доказательстве теоремы 5.1. При $i > g$ соединим точки O_i и O_{i+1} попарно непересекающимися отрезками $c_i \subset M$. (Здесь $O_{n+1} = O_1$.) Рассмотрим на H геодезические сегменты

$$a_i b_i^{-1} a_i^{-1} = [O_i, A_i B_i^{-1} A_i^{-1} O_i], \quad a_i^{-1} = [A_i B_i^{-1} A_i^{-1} O_i, B_i^{-1} A_i^{-1} O_i], \quad c_i^{-1} = [O_i, C^{-1} O_i]$$

Тогда естественная проекция $\Phi : \Lambda \to P$ порождает стандартную систему образующих

$$v_{O_1} = \{\Phi(a_i), \Phi(b_i)(i = 1, ..., g), \quad \Phi(c_i)(i = g + 1, ..., n)\} \in \pi_1(P, \Phi(O_1))\}.$$

Непрерывный перенос точки O_1 в q переводит v_{O_1} в стандартную систему образующих v_q. □

Цель этого параграфа — доказать обращение этой леммы.

Теорема 5.2. *Пусть* $\Gamma \subset Aut(\Lambda)$ *— фуксова группа типа* (g, k, m), $P = \Lambda/\Gamma$, $\Phi : \Lambda \to P$ *— естественная проекция и*

$$v = \{a_i, b_i(i = 1, ..., g), c_i(i = g + 1, ..., n)\}$$

— стандартная система образующих группы $\pi_1(P, \Phi(q))$. *Тогда* $V = \Phi_q^{-1}(v)$ *— последовательный набор типа* (g, k, m).

Для доказательства нам понадобится несколько дополнительных определений и лемм. Пусть $\tilde{a}$ — контур, представляющий $a \in \pi_1(P, \Phi(q))$. Будем обходить контур $\tilde{a}$, начиная с точки $\Phi(q)$, "поднимая" этот обход на Λ, начиная с точки q. После бесконечного числа обходов в обоих направлениях мы получим линию $\ell(\tilde{a}) \subset M$ с концами в неподвижных точках автоморфизма $A = \Phi_q^{-1}(a)$ (см. рис. 7).

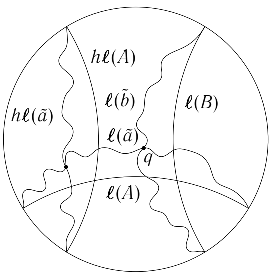


Рис. 7

Лемма 5.4. *Если* $\tilde{a}$ *не имеет самопересечений, то* $h\ell(A)$ *и* $\ell(A)$ *не пересекаются при всех* $h \in \Gamma$.

Proof. Пусть $h\ell(A)$ и $\ell(A)$ пересекаются при $h \in \Gamma$. Тогда $h\ell(\tilde{a})$ и $\ell(\tilde{a})$ также пересекаются (см. рис. 7). □

Лемма 5.5. *Пусть контуры* $\tilde{a}, \tilde{b}$ *представляют элементы* $a, b \in \pi_1(P, \Phi(q))$. *Пусть существует малая деформация контуров* $\tilde{a}$ *и* $\tilde{b}$, *переводящая их в непересекающиеся контуры. Тогда*

$$\ell(\Phi_q^{-1}(a)) \cap \ell(\Phi_q^{-1}(b)) = \emptyset.$$

Proof. Если
$$\ell(\Phi_q^{-1}(a)) \cap \ell(\Phi_q^{-1}(b)) \neq \emptyset,$$
то $\ell(\tilde{a})$ и $\ell(\tilde{b})$ пересекаются так, что их пересечение нельзя исключить малой деформацией (см. рис.7). $\square$

Лемма 5.6. *Пусть контуры $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ не имеют самопересечений и представляют $c_1, c_2, c_3 \in \pi_1(P, \Phi(q))$ такие, что $c_1 {\cdot} c_2 {\cdot} c_3 = 1$. Пусть существует малая деформация контуров $\tilde{c}_1$,$\tilde{c}_2$ и $\tilde{c}_3$, переводящая их в попарно непересекающиеся контуры. Тогда или набор*
$$\{\Phi_q^{-1}(c_1), \Phi_q^{-1}(c_2), \Phi_q^{-1}(c_3)\},$$
или набор
$$\{\Phi_q^{-1}(c_3^{-1}), \Phi_q^{-1}(c_2^{-1}), \Phi_q^{-1}(c_1^{-1})\}$$
является последовательным.

Proof. Положим $C_i = \Phi_q^{-1}(c_i)$. Согласно лемме 5.5 $\ell(C_1) \cap \ell(C_2) = \emptyset$. Предположим, что $\ell(C_1)$ и $\ell(C_2)$ расположены как на рис.8. Рассмотрим дуги $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и

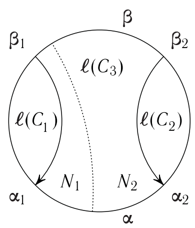
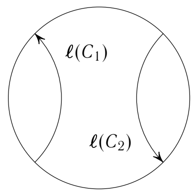
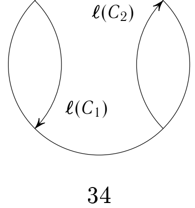


Рис. 8

$\beta = (\beta_1, \beta_2)$ на $\partial\Lambda$. Тогда $C_1\alpha \subset \alpha$, $C_2\alpha \subset \alpha$, откуда $C_3^{-1}\alpha = C_1C_2\alpha \subset \alpha$. Аналогично $C_3^{-1}\beta \subset \beta$. Таким образом, $\ell(C_3)$ проходит так, как неориентированная линия на последнем рисунке. Но тогда согласно лемме 5.4 $C_1\ell(C_3) \subset N_1$ и, следовательно, $C_1\ell(C_2) \in N_1$. Это невозможно, поскольку $C_1\ell(C_2) = C_3^{-1}C_2^{-1}\ell(C_2) = C_3^{-1}\ell(C_2) \subset N_2$. Таким образом, $\ell(C_1)$ и $\ell(C_2)$ расположены как на одном из следующих рисунков





Аналогичное утверждение верно также для пар (C_2, C_3) и (C_3, C_1). Отсюда следует, что или набор $\{C_1, C_2, C_3\}$, или набор $\{C_3^{-1}, C_2^{-1}, C_1^{-1}\}$ являются последовательным. $\square$

Доказательство теоремы 5.2

Proof. Положим $A_i = \Phi_q^{-1}(a_i), \quad B_i = \Phi_q^{-1}(b_i), \quad C_i = \Phi_q^{-1}(c_i)$. Рассмотрим наборы

$$\{x_1, ..., x_{g+n}\} = \{a_1, b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}, a_2, ... b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, c_{g+1}, ..., c_n\}$$

и

$$\{X_1, ..., X_{g+n}\} = \{A_1, B_1 A_1^{-1} B_1^{-1}, A_2, ..., B_g A_g^{-1} B_g^{-1}, C_{g+1}, ..., C_n\}.$$

Применяя лемму 5.6 к наборам

$$\{x_1 \cdots x_{\ell-1}, x_\ell, x_{\ell+1} \cdots x_{g+n}\},$$

находим, что или все наборы вида

$$\{X_1 \cdots X_{\ell-1}, X_\ell, X_{\ell+1} \cdots X_{g+n}\},$$

или все наборы вида

$$\{X_{g+n}^{-1} \cdots X_{\ell+1}^{-1}, X_\ell^{-1}, X_{\ell-1}^{-1} \cdots X_1^{-1}\}$$

являются последовательными. То есть или набор $\{X_1, ..., X_{g+n}\}$, или набор $\{X_{g+n}^{-1}, ..., X_1^{-1}\}$ является последовательным. Согласно лемме 5.3, однако, лишь в первом случае контуры, представляющие a_i, b_i, c_i, расположены в окрестности точки p как на соответствующем рисунке. Следовательно, именно набор $\{X_1, ..., X_{g+n}\}$ является последовательным набором типа $(0, 2g+k, m)$ и, значит, набор

$$\{A_i, B_i (i = 1, ..., g), C_j (j = g+1, ..., n\}$$

является последовательным типа (g, k, m). $\square$

Задача 5.12. *Используя лемму 5.3 и теорему 5.2, докажите, что набор автоморфизмов $\{C_1, \ldots, C_n\}$ является последовательным, если и только если последовательными являются наборы $\{C_1, \ldots, C_{n-2}, C\}$ и $\{C, C_{n-1}, C_n\}$, где $C = (C_{n-1}, C_n)^{-1}$. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произвольных последовательных наборов типа (g, k, m).*

5.4. **Последовательные наборы типов (0,3,0),(0,2,1) и (0,1,2).** Согласно теоремам 5.1 и 5.2, всякий последовательный набор типа (g, k, m) порождает фуксову группу типа (g, k, m) и всякая фуксова группа типа (g, k, m) порождается последовательным набором. В этом параграфе мы найдем все классы сопряженности последовательных наборов типов $(0, 3, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 2)$. Это удобно делать на верхней полуплоскости.

Лемма 5.7. *Пусть*

$$C_1 z = \lambda_1 z \quad (\lambda_1 > 1), \quad C_2(z) = \frac{(\lambda_2 \alpha - \beta) z + (1 - \lambda_2) \alpha \beta}{(\lambda_2 - 1) z + (\alpha - \lambda_2 \beta)} \quad (\lambda_2 > 1)$$

$$\text{и} \quad C_3 = (C_1 C_2)^{-1}.$$

Тогда $\{C_1, C_2, C_3\}$ — последовательный набор, если и только если

$$0 < \left(\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{1+\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2 \beta \leqslant \alpha < \beta < \infty. \tag{13}$$

При этом C_3 — параболический автоморфизм, если и только если

$$\left(\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{1+\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2 \beta = \alpha.$$

Proof. По условию

$$C_3^{-1}(z) = C_1C_2(z) = \lambda_1 \frac{(\lambda_2\alpha-\beta)z + (1-\lambda_2)\alpha\beta}{(\lambda_2-1)z + (\alpha-\lambda_2\beta)}.$$

Неподвижные точки автоморфизма C_3 — это корни уравнения $C_3^{-1}(x) = x$, то есть

$$(\lambda_2-1)x^2 - (\lambda_2\beta-\alpha-\lambda_1\beta+\lambda_1\lambda_2\alpha)x + \lambda_1(\lambda_2-1)\alpha\beta = 0. \tag{14}$$

Следовательно, C_3 — гиперболический или параболический автоморфизм, если и только если

$$(\lambda_2\beta-\alpha-\lambda_1\beta+\lambda_1\lambda_2\alpha)^2 - 4\lambda_1(\lambda_2-1)^2\alpha\beta \geq 0$$

. Причем равенство имеет место в точности для параболических автоморфизмов.

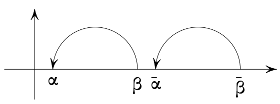
Задача 5.13. *Доказать, что последнее неравенство эквивалентно неравенству*

$$(\alpha+\lambda_1\lambda_2\alpha-\lambda_1\beta-\lambda_2\beta)^2 - 4\lambda_1\lambda_2(\beta-\alpha)^2 \geq 0,$$

которое, в свою очередь выполняется лишь при

$$\alpha \geq \left(\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{1+\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2\beta \quad \textit{или} \quad \alpha \leq \left(\frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}-1}\right)^2\beta.$$

Пусть теперь $\{C_1, C_2, C_3\}$ — последовательный набор и $\bar\alpha \leqslant \bar\beta$ — корни уравнения (14). Тогда $0 < \alpha < \beta < \bar\alpha$,



и, согласно теореме Виета,

$$\frac{\lambda_2\beta-\alpha-\lambda_1\beta+\lambda_1\lambda_2\alpha}{2(\lambda_2-1)} = \frac{\bar\alpha+\bar\beta}{2} > \beta,$$

откуда $\alpha(\lambda_1\lambda_2-1) > \beta(\lambda_1+\lambda_2-2)$. Кроме того $\lambda_1\lambda_2-1 > \lambda_1+\lambda_2-2 > 0$ в виду $\lambda_i > 1$. Следовательно,

$$\alpha > \frac{\lambda_1+\lambda_2-2}{\lambda_1\lambda_2-1}\beta > \frac{\lambda_1+\lambda_2-2+2(1-\sqrt{\lambda_1\lambda_2})}{\lambda_1\lambda_2-1+2(1-\sqrt{\lambda_1\lambda_2})}\beta$$

$$= \frac{\lambda_1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1\lambda_2-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+1}\beta = \left(\frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}-1}\right)^2\beta.$$

Таким образом,

$$\alpha \geqslant \left(\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+1}\right)^2\beta.$$

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть

$$0 < \left(\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+1}\right)^2 \beta \leqslant \alpha < \beta < \infty$$

и $\bar\alpha \leqslant \bar\beta$ — корни уравнения (14). Тогда соотношение $\beta < \bar\alpha$ эквивалентно паре соотношений

$$\bar\alpha \cdot \bar\beta > \beta^2, \tag{15}$$

$$(\lambda_2-1)\beta^2 - (\lambda_2\beta - \alpha - \lambda_1\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha)\beta + \lambda_1(\lambda_2-1)\alpha\beta > 0. \tag{16}$$

Соотношение (15) очевидно ввиду теоремы Виета

$$\bar\alpha \cdot \bar\beta = \lambda_1\alpha\beta \geqslant \lambda_1\left(\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+1}\right)^2\beta^2 = \left(\frac{\lambda_1+\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{1+\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2\beta^2 > \beta^2.$$

Соотношение (16) следует из

$$\lambda_2\beta^2 - \beta^2 - \lambda_2\beta^2 + \alpha\beta + \lambda_1\beta^2 - \lambda_1\lambda_2\alpha\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha\beta - \lambda_1\alpha\beta =$$
$$= (\lambda_1-1)(\beta^2-\alpha\beta) > 0.$$

Таким образом, $\beta < \bar\alpha$. Рассматривая предел $\lambda_1 \to 1$ находим, что $\bar\alpha$ — неподвижная притягивающая точка Таким образом,$\{C_1, C_2, C_3\}$ — последовательным набор. $\square$

Задача 5.14. *Пусть*

$$C_1(z) = \lambda z \quad (\lambda > 1), \quad C_2(z) = \frac{(1-a\gamma)z + a^2\gamma}{-\gamma z + (1+a\gamma)} \quad (\gamma > 0)$$
$$\text{и} \quad C_3 = (C_1C_2)^{-1}.$$

Тогда $\{C_1, C_2, C_3\}$ — последовательный набор, если и только если $a\gamma \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}+1}{\sqrt{\lambda}-1}$. При этом $C_3 \in Aut_1(H)$, если и только если $a\gamma = \frac{\sqrt{\lambda}+1}{\sqrt{\lambda}-1}$.

5.5. **Последовательные наборы типа (1,1,0).**

Лемма 5.8. *Пусть*

$$A(z) = \frac{(\lambda_A\alpha_A - \beta_A)z + (1-\lambda_A)\alpha_A\beta_A}{(\lambda_A-1)z + (\alpha_A - \lambda_A\beta_A)},$$

$$B(z) = \frac{(\lambda_B\alpha_B - \beta_B)z + (1-\lambda_B)\alpha_B\beta_B}{(\lambda_B-1)z + (\alpha_B - \lambda_B\beta_B)}$$

и

$$C^{-1} = [A, B](z) = \lambda z \quad (\lambda_A, \lambda_B, \lambda > 1).$$

Тогда $\{A, B, C\}$ является последовательным набором типа (1,1,0), если и только если

$$-\infty < \alpha_A < \beta_B < \beta_A < \alpha_B < 0, \tag{17}$$

$$\frac{\alpha_A}{\beta_A} < \sqrt{\lambda}, \quad \frac{\beta_B}{\alpha_B} < \sqrt{\lambda}, \tag{18}$$

$$\lambda_A = \frac{\alpha_A\sqrt{\lambda} - \beta_A}{\beta_A\sqrt{\lambda} - \alpha_A} \quad \lambda_B = \frac{\beta_B\sqrt{\lambda} - \alpha_B}{\alpha_B\sqrt{\lambda} - \beta_B}, \tag{19}$$

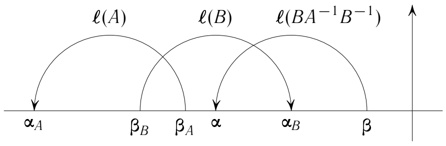
$$\alpha_B\beta_B\lambda - [(\alpha_A+\beta_A)(\alpha_B+\beta_B) - \alpha_A\beta_A - \alpha_B\beta_B]\sqrt{\lambda} + \alpha_A\beta_A = 0, \tag{20}$$

причем в этом случае

$$A(z) = \frac{(\alpha_A+\beta_A)\sqrt{\lambda}z - \alpha_A\beta_A(\sqrt{\lambda}+1)}{(\sqrt{\lambda}+1)z - (\alpha_A+\beta_A)},$$

$$B(z) = \frac{(\alpha_B+\beta_B)z - \alpha_B\beta_B(\sqrt{\lambda}+1)}{(\sqrt{\lambda}+1)z - (\alpha_B+\beta_B)\sqrt{\lambda}}.$$

Proof. Пусть $\{A, B, C\}$ — последовательный набор типа (1,1,0). Тогда $\{A, BA^{-1}B^{-1}, C\}$ — последовательный набор, откуда $-\infty < \alpha_A < \beta_B < \alpha_B < 0$



Рассмотрим $\widetilde{A} = (AB)A(AB)^{-1} = AC$. Пусть $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ — неподвижные точки автоморфизма $\widetilde{A}$. Тогда

$$\frac{(\lambda_A\alpha_A - \beta_A)\frac{1}{\lambda}z + (1-\lambda_A)\alpha_A\beta_A}{(\lambda_A-1)\frac{1}{\lambda}z + (\alpha_A - \lambda_A\beta_A)} = \widetilde{A}(z) = \frac{(\lambda_A\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta})z + (1-\lambda_A)\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}{(\lambda_A-1)z + (\widetilde{\alpha} - \lambda_A\widetilde{\beta})},$$

откуда

$$\lambda_A\alpha_A - \beta_A = \lambda_A\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}, \quad \lambda(1-\lambda_A)\alpha_A\beta_A = (1-\lambda_A)\tilde{\alpha}\tilde{\beta}, \quad \lambda(\alpha_A - \lambda_A\beta_A) = \tilde{\alpha} - \lambda_A\tilde{\beta}.$$

Отсюда следует

$$\lambda_A = \frac{\alpha_A\sqrt{\lambda} - \beta_A}{\beta_A\sqrt{\lambda} - \alpha_A}, \quad \lambda_B = \frac{\beta_B\sqrt{\lambda} - \alpha_B}{\alpha_B\sqrt{\lambda} - \beta_B}.$$

В частности,

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\beta_A - \alpha_A\lambda_A}{\alpha_A - \beta_A\lambda_A} > \frac{-\alpha_A\lambda_A}{-\beta_A\lambda_A} = \frac{\alpha_A}{\beta_A} \text{ и, аналогично, } \sqrt{\lambda} > \frac{\beta_B}{\alpha_B}.$$

Подставляя найденные значения для λ_A, λ_B, получаем

$$A(z) = \frac{(\alpha_A+\beta_A)\sqrt{\lambda}z - \alpha_A\beta_A(\sqrt{\lambda}+1)}{(\sqrt{\lambda}+1)z - (\alpha_A+\beta_A)},$$

$$B(z) = \frac{(\alpha_B+\beta_B)z - \alpha_B\beta_B(\sqrt{\lambda}+1)}{(\sqrt{\lambda}+1)z - (\alpha_B+\beta_B)\sqrt{\lambda}}.$$

Соотношение $[A, B](z) = \lambda z$ влечет (20).

Пусть теперь выполняется (17) – (20). Положим

$$\widetilde{A}(z) = \frac{(\alpha_A+\beta_A)\sqrt{\lambda}z - \alpha_A\beta_A(\sqrt{\lambda}+1)}{(\sqrt{\lambda}+1)z - (\alpha_A+\beta_A)},$$

$$\widetilde{B}(z) = \frac{(\alpha_B+\beta_B)z - \alpha_B\beta_B(\sqrt{\lambda}+1)}{(\sqrt{\lambda}+1)z - (\alpha_B+\beta_B)\sqrt{\lambda}}.$$

Тогда $\widetilde{A}(\alpha_A) = \alpha_A$, $\widetilde{A}(\beta_A) = \beta_A$, $\widetilde{B}(\alpha_B) = \alpha_B$, $\widetilde{B}(\beta_B) = \beta_B$. Согласно (20) $[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = C^{-1}$. Поэтому $\{\widetilde{A}, \widetilde{B}\widetilde{A}^{-1}\widetilde{B}^{-1}, C\}$ — последовательный набор. Таким образом, $\{\widetilde{A}, \widetilde{B}, C\}$ — последовательный набор типа (1,1.0).

Из совпадения неподвижных точек следует

$$\widetilde{A}z = \frac{(\widetilde{\lambda}_A\alpha_A - \beta_A)z + (1 - \widetilde{\lambda}_A)\alpha_A\beta_A}{(\widetilde{\lambda}_A - 1)z + (\alpha_A - \lambda_A\beta_A)}.$$

Причем, как уже доказано

$$\widetilde{\lambda}_A = \frac{\alpha_A\sqrt{\lambda} - \beta_A}{\beta_A\sqrt{\lambda} - \alpha_A} = \lambda_A.$$

Следовательно, $\widetilde{A} = A$. Аналогично $\widetilde{B} = B$. □

5.6. **Пространство типа Фрике-Клейна.** Для описание пространства модулей $M_{g,k,m}$ удобно использовать вспомогательное пространство $T_{g,k,m}$. Впервые пространство эквивалентное такого типа было построено и исследовано в технически трудной двухтомной монографии Ф.Фрике и Ф.Клейна (1897, 1912 годы) с помощью длин геодезических в гиперболической метрике римановой поверхности. Ф.Фрике и Ф.Клейн доказали, что их вспомогательное пространство пространство, гомеоморфно $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}$. Другое ее описание этого пространства было дано в работах О.Тейхмюллера (1940 г.) в терминах развитой им теории квазиконформных отображений.

Мы будем считать, что $T_{g,k,m}$ — это множество классов сопряженности последовательных наборов типа (g, k, m), параметризованное притягивающими неподвижными точками $\alpha \in \mathbb{R}$, отталкивающими неподвижными точками $\beta \in \mathbb{R}$ и параметрами сдвигов $\lambda > 1$.

Теорема 5.3. *Пространство $T_{g,k,m}$ изоморфно $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}$, как вещественное многообразие.*

Proof. В классе сопряженности последовательных наборов типа $(0, 3, 0)$ имеется ровно один набор (C_1, C_2, C_3) такой что $C_1(z) = \lambda_1 z$, $\lambda_1 > 1$ и $\beta_{C_2} = 1$. Согласно лемме 5.7, множество последовательных наборов (C_1, C_2, C_3) с таким условием описывается числами $(\lambda_1, \lambda_2, \alpha)$, где $\lambda_1, \lambda_2 > 1$ и $\left(\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{1+\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2 < \alpha < 1$. Таким образом, $T_{0,3,0}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3$.

Докажем теперь, с помощью индукции, что пространство $T_{0,k,0}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{3k-6}$. Согласно задаче 5.12, пространство $T_{0,k,0}$ совпадает с пространством классов сопряженности пар последовательных наборов $\{C_1, \ldots, C_{k-2}, C^{-1}\}$ и $\{C, C_{k-1}, C_k\}$. В классе сопряженности таких пар имеется ровно одна пара такая, что $C(z) = \lambda z$, $\lambda > 1$ и $\beta_{C_{k-2}} = -1$. Согласно лемме 5.7, множество последовательных наборов (C, C_{k-1}, C_k) определяется, при этом, положительными параметрами $(\alpha_{C_{k-1}}, \beta_{C_{k-1}}, \lambda_{C_{k-1}})$ с ограничениями $\left(\frac{\sqrt{\lambda_C}+\sqrt{\lambda_{C_{k-1}}}}{1+\sqrt{\lambda_C\lambda_{C_{k-1}}}}\right)^2 \beta_{C_{k-1}} < \alpha_{C_{k-1}} < \beta_{C_{k-1}}$, $\lambda_{C_{k-1}} > 1$. Эти ограничения задают область, гомеоморфную $\mathbb{R}^3$. Используя теперь предположение индукции, находим, что пространство $T_{0,k,0}$ гомеоморфно $T_{0,k-1,0} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3k-6}$.

В классе сопряженности последовательных наборов типа $(1,1,0)$ имеется ровно один набор (A,B,C) такой, что $C(z)=\lambda z$, $\lambda>1$ и $\alpha_B=-1$. Согласно лемме 5.8, множество последовательных наборов (A,B,C) с таким условием описывается числами $(\lambda,\alpha_A,\beta_A,\beta_B)$, где $-\infty<\alpha_A<\beta_B<\beta_A<-1$, $\frac{\alpha_A}{\beta_A}<\sqrt{\lambda}$, $\frac{\beta_B}{-1}<\sqrt{\lambda}$ и $-\beta_B\lambda-[(\alpha_A+\beta_A)(-1+\beta_B)-\alpha_A\beta_A+\beta_B]\sqrt{\lambda}+\alpha_A\beta_A=0$ Таким образом, $T_{1,1,0}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3$.

Докажем теперь теорему для поверхностей произвольного типа $(g,k,0)$. Согласно задаче 5.12, пространство $T_{g,k,0}$ состоит из семейств, состоящих из класса сопряженности последовательного набора $\{C_1,\ldots,C_{g+k}\}$ типа $(0,g+k,0)$ и последовательных наборов $(A_1,B_1,C_1),\ldots,(A_g,B_g,C_g)$ типа $(1,1,0)$. Согласно лемме 5.8, множество последовательных наборов (A,B,C) типа $(1,1,0)$ с предписанным автоморфизмом C числами описывается числами $(\alpha_A,\beta_A,\alpha_B,\beta_B)$, где $-\infty<\alpha_A<\beta_B<\beta_A<\alpha_B<0$, $\frac{\alpha_A}{\beta_A}<\sqrt{\lambda}$, $\frac{\beta_B}{\alpha_B}<\sqrt{\lambda}$ и $\alpha_B\beta_B\lambda-[(\alpha_A+\beta_A)(\alpha_B+\beta_B)-\alpha_A\beta_A-\alpha_B\beta_B]\sqrt{\lambda}+\alpha_A\beta_A=0$ и λ — параметр сдвига автоморфизма C. Пространство $T_{g,k,0}$ гомеоморфно, таким образом, пространству $T_{0,g+k,0}\times(\mathbb{R})^g\cong\mathbb{R})^{6g+3k-6}$.

Общий случай пространства $T_{g,k,m}$ разбирается аналогично и остается в качестве задачи слушателям. □

5.7. **Пространство модулей** $M_{g,k,m}$. Рассмотрим множество $\tilde{T}_{g,k,m}$ всех последовательных наборов типа (g,k,m). Последовательный набор $\{A_1,B_1,...,A_g,B_g,C_1,...,C_n\}\in\tilde{T}_{g,k,m}$ порождает группу Γ и, согласно теореме 5.1, риманову поверхность $\Lambda/\Gamma\in M_{g,k,m}$. Полученное отображение $\tilde{\Phi}:\tilde{T}_{g,k,m}\to M_{g,k,m}$ является сюръективным согласно теореме 5.2.

Группа $\mathsf{Aut}(\Lambda)$ действует на $\tilde{T}_{g,k,m}$, переводя набор $\{A_1,B_1,...,A_g,B_g,C_1,...,C_n\}$ в сопряженный набор $h\{A_1,B_1,...,A_g,B_g,C_1,...,C_n\}h^{-1}$, $h\in\mathsf{Aut}(\Lambda)$. Фактор-пространство $\tilde{T}_{g,k,m}/\mathsf{Aut}(\Lambda)$ по определению совпадает с $T_{g,k,m}$. Сопряженным последовательным наборам отвечают изоморфные римановы поверхности. Отображение $\tilde{\Phi}$ порождает, таким образом, сюръективное отображение $\Phi:T_{g,k,m}\to M_{g,k,m}$. Исследуем вопрос о том, какие точки пространства $T_{g,k,m}$ переходят в одну и ту же риманову поверхность $P=\Lambda/\Gamma$.

Пусть $\mathtt{Hom}(P)$ — группа автогомеоморфизмов поверхности P и $\mathtt{IHom}(P)\subset\mathtt{Hom}(P)$ подгруппа автогомеоморфизмов, изотопных тождественному. Фактор-группа $\mathtt{Mod}(P)=\mathtt{Hom}(P)/\mathtt{IHom}(P)$ *называется группой классов отображений.* Она играет важную роль в маломерной топологии. В ее терминах можно дать, например, классификацию трехмерных топологических многообразий.

Пусть теперь $P=\Lambda/\Gamma$ — риманова поверхность типа (g,k,m) и $T(P)$ — множество классов сопряженности последовательных наборов типа (g,k,m), порождающих фуксову группу Γ. Стандартные базисы группы $\pi_1(P,q)$ и группы $\pi_1(P,q')$ назовем *эквивалентными*, если первый базис переходит во второй в результате некоторого непрерывного изменения точки q. Обозначим через $t(P)$ множество классов эквивалентности стандартных базисов фундаментальной группы поверхности P. Лемма 5.3 и теорема 5.2 устанавливают естественное взаимно-однозначное соответствие между множествами $T(P)$ и $t(P)$. Группа классов отображений $\mathtt{Mod}(P)$ транзитивно действует на множестве $t(P)$ и, следовательно, множестве $T(P)$.

Пусть $\phi \in \mathtt{Mod}(P)$, $V \in T(P)$ и $V' \in T(P')$, где $P = \Lambda/\Gamma$ и $P' = \Lambda/\Gamma'$. Элемент $D \in \Gamma$ представляется в виде произведения элементов последовательного набора V. Заменив сомножители этого произведения на соответствующие элементы последовательного набора V', получим $D' \in \Gamma'$. Элемент $\phi(D)$ также представляется в виде произведения элементов последовательного набора V. Заменив сомножители этого произведения на соответствующие элементы последовательного набора V', получим элемент, который мы обозначим $\phi(D')$. Соответствие $D' \mapsto \phi(D')$ задает действие группы $\mathtt{Mod}(P)$ на $T(P')$ и естественный изоморфизм между группами $\mathtt{Mod}(P)$ и $\mathtt{Mod}(P')$. Обозначим группу, получающуюся в результате всех таких изоморфизмов, через $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$.

Таким образом, мы доказали

Лемма 5.9. *Группа $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$ естественно действует на пространстве $T_{g,k,m}$, превращая отображение $\Phi : T_{g,k,m} \to M_{g,k,m}$ во взаимно-однозначное соответствие $T_{g,k,m}/\mathtt{Mod}_{g,k,m} \to M_{g,k,m}$.*

Лемма 5.10. *Группа $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$ дискретно действует на $T_{g,k,m}$ гладкими отображениями.*

Proof. Согласно нашим определениям, элемент из $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$ определяется представлением элементов одного последовательного набора образующих в виде произведения элементов другого последовательного набора образующих. Поэтому параметры, определяющие новый последовательный набор, выражаются через параметры, определяющие старый последовательный набор по некоторым аналитическим формулам.

Для доказательства дискретности действия группы $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$ на множестве $T(\Lambda/\Gamma)$ рассмотрим множество $L(\Gamma)$ параметров сдвигов всех преобразований из Γ. Используя геометрию Лобачевского, нетрудно доказать, что набор $L(\Gamma)$ дискретен, не зависит от порождающего группу Γ последовательного набора, но вычисляется через его параметры. Более того, множество $L(\Gamma)$ мало меняется при малом изменении параметров, определяющий последовательный набор. Таким образом, малая окрестность точки из T не содержит других точек ее орбиты относительно группы $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$. □

Теорема 5.4. *Пространство модулей $M_{g,k,m}$ имеет естественную структуру связного вещественно-аналитического пространства вида $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}/\mathtt{Mod}_{g,k,m}$, где $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$ — дискретная группа вещественно-аналитических отображений.*

Proof. Согласно леммам 5.9 и 5.10, множество $M_{g,k,m}$ естественно отождествляется с вещественны аналитическим пространством $T_{g,k,m}/\mathtt{Mod}_{g,k,m}$. Кроме того, согласно теореме 5.3 пространство $T_{g,k,m}$ изоморфно $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}$. □

Замечание 5.1. *Можно доказать, что пространство модулей $M_{g,0,m}$ имеет даже естественную комплексно-аналитическую структуру. Особенности $M_{g,k,m}$ совпадают с римановыми поверхностями, имеющими не тривиальные голоморфные автоморфизмы.*

6. Голоморфные и мероморфные дифференциалы

Напомним, что голоморфный дифференциал на римановой поверхности – это комплекснозначная дифференциальная 1-форма, являющаяся локально дифференциалом голоморфной функции. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 6.1. *На всякой компактной римановой поверхности рода $g \geq 1$ пространство голоморфных дифференциалов имеет размерность g.*

В случае рода 1 теорема доказана в лекции о выпрямлении гладкой почти комплексной структуры на торе. Тем самым, будем считать что $g \geq 2$. Пусть $\mathcal{P}_g$ – компактная Риманова поверхность рода $g \geq 1$. Как показано ниже, справедливость Теоремы 6.1 вытекает из следующей теоремы, доказанной ниже.

Теорема 6.2. *В каждом классе вещественных одномерных когомологий де Рама на поверхности $\mathcal{P}_g$ существует* **гармонический дифференциал:** *вещественная замкнутая 1-форма, являющаяся локально дифференциалом гармонической функции.*

Предложение 6.1. *В последней теореме для каждого класса когомологий соответствующий гармонический дифференциал единственен.*

Proof. Разность двух гармонических дифференциалов из одного когомологического класса есть дифференциал гармонической функции на компактной римановой поверхности, а последняя есть константа по Принципу Максимума. □

Известно, что вещественная и мнимая части голоморфной функции являются гармоническими функциями. Всякая гармоническая функция локально является вещественной частью голоморфной функции, и соответствующая мнимая часть определяется вещественной частью однозначно с точностью до аддитивной константы (см. лекции о теореме об униформизации). Отсюда следует, что вещественная и мнимая части голоморфного дифференциала являются гармоническими дифференциалами.

Замечание 6.1. *Всякий гармонический дифференциал является вещественной частью голоморфного. Мнимая часть голоморфного дифференциала определяется по вещественной части однозначно: при дифференцировании предыдущая аддитивная константа убивается. Соответствие "вещественная часть голоморфного дифференциала $\mapsto$ мнимая часть" есть линейная анти-инволюция J, действующая на пространстве гармонических дифференциалов: $J^2 = -Id$.*

Proof. **Теоремы 6.1 по модулю Теоремы 6.2.** Обозначим через Ω_h пространство вещественных гармонических дифференциалов на поверхности $\mathcal{P}_g$. На нем действует вышеупомянутая инволюция J. Пространство Ω_h имеет размерность $2g$ и разлагается в прямую сумму g двумерных J-инвариантных подпространств V_j, $j = 1, \dots, g$ (анти-инволютивность). Каждое подпространство V_j имеет базис из дифференциалов $\omega_{1,j}$ и $\omega_{2,j} = J\omega_{1,j}$. По построению, дифференциалы $\omega_j = \omega_{1,j} + i\omega_{2,j}$, $j = 1, \dots, g$ голоморфны и линейно независимы над $\mathbb{C}$. С другой стороны, всякий голоморфный дифференциал ω является их $\mathbb{C}$-линейной комбинацией. Действительно ω однозначно определяется своей вещественной частью. Последняя есть линейная комбинация базисных гармонических дифференциалов $\omega_{k,j}$, $k = 1, 2$, $j = 1, \dots, g$, с вещественными коэффициентами, или эквивалентно, вещественная часть $\mathbb{C}$-линейной комбинации форм ω_j. Следовательно, ω совпадает с последней $\mathbb{C}$-линейной комбинацией в силу единственности (предыдущее утверждение). Теорема 6.1 доказана. $\square$

Идея доказательства Теоремы 6.2. Фиксируем произвольную конформную метрику на $\mathcal{P}_g$. Искомый гармонический дифференциал в данном когомологическом классе должен иметь минимальную L_2-норму.

Гармоничность минимизирующего дифференциала есть версия следующей классической теоремы.

Теорема 6.3. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ – компактная область с гладкой границей, $u : U \to \mathbb{R}$ – гармоническая функция, C^2- гладкая в замыкании области. Тогда для любой C^2-гладкой функции $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$, совпадающей с u на границе ∂U, имеет место неравенство*

$$\int_U ||\operatorname{grad} u||^2 dxdy \leq \int_U ||\operatorname{grad} f||^2 dxdy.$$

Proof. Мы хотим показать, что функция u минимизирует L_2-норму градиента в рассматриваемом классе функций f. Для этого достаточно показать, что градиент всякой функции $\phi = f - u$, гладкой на $\overline{U}$ и обращающейся в нуль на границе, ортогонален $\operatorname{grad} u$. Действительно, поток векторного поля $\phi \operatorname{grad} u$ через границу ∂U равен нулю, так как $\phi_{\partial U} = 0$. С другой стороны, поток равен

$$\int_U \div(\phi \operatorname{grad} u) dxdy = \int_U (\operatorname{grad} \phi, \operatorname{grad} u) dxdy + \int_U \phi \Delta u dxdy, \tag{21}$$

в силу формулы Стокса. Второй член правой части равен нулю, в силу гармоничности функции u. Значит, последние градиенты L_2-ортогональны. Теорема доказана. $\square$

Для доказательства Теоремы 6.2 мы докажем инвариантный аналог теоремы 6.3 для произвольной конформной метрики. Рассмотрим стандартный базис в первых гомологиях поверхности из a- и b-циклов и построим гармонические дифференциалы, образующие двойственный базис в когомологиях. Для данного базисного цикла α ищем соответствующий двойственный гармонический дифференциал. Точнее, ищем его первообразную: гармоническое отображение в классе отображений $\mathcal{P}_g \to S^1$, переводящих цикл α в обход окружности против часовой стрелки, а другие базисные гомологические классы – в нуль. Для этого выберем гладкую конформную метрику на $\mathcal{P}_g$ и в рассматриваемом классе отображений будем искать инфинум L_2-нормы градиента. Выберем подходящим образом нормированную минимизирующую последовательность гладких отображений и покажем, что она ограничена в норме Соболева H^1 и следовательно, она слабо сходится в пространстве Соболева к некоторому пределу u. По построению, $\operatorname{grad} u$ L_2-ортогонален градиенту любой гладкой функции. А значит, u гармонична: всякая функция $f \in H^1$ на координатном диске, градиент которой L_2-ортогонален любой финитной гладкой функции, – гармонична. Это докажет Теорему 6.2.

Необходимый подготовительный материал (Теорема 6.3 в инвариантной форме, пространства Соболева) будет представлен ниже.

6.1. **Подготовительный материал 1: Теорема 6.3 в инвариантной форме.** Пусть M – риманово многообразие. Риманова метрика задает отображение двойственности, переводящее вектор $v \in T_xM$ в 1-форму $v^* \in T_x^*M$: $v^*(w) = (v, w)$

для любого $w \in T_x M$. *Градиент* $\operatorname{grad} f$ функции $f : M \to \mathbb{R}$ – это векторное поле, двойственное к ее дифференциалу: $(\operatorname{grad} f, w) = df(w)$ для любого $w \in TM$.

Пусть v – векторное поле на M. *Дивергенция* $\div v$ – это функция $M \to \mathbb{R}$, определенная следующим образом. Пусть $x \in M$, $B_\varepsilon(x)$ – шар малого радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в x, $B_\varepsilon^t(x)$ – его образ под действием отображения потока поля v за время t. Положим

$$\div_\varepsilon v = \frac{d}{dt}\left(\frac{Vol(B_\varepsilon^t(x))}{Vol(B_\varepsilon(x))}\right); \ \div(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \div_\varepsilon(x).$$

$$\Delta f = \div \operatorname{grad} f \text{ для любой функции } f : M \to \mathbb{R}.$$

Упражнение 6.1. *Проверить, что*

а) для стандартной евклидовой метрики градиент, дивергенция и лапласиан, определенные выше, совпадают с обычными градиентом, дивергенцией и лапласианом;

б) если в некоторых локальных координатах с началом в точке O метрика совпадает с евклидовой с точностью до малых второго порядка (например, в геодезических координатах), то вышевведенные дивергенция и лапласиан в точке O записываются в этих координатах как стандартные.

в) для любых функции ϕ и векторного поля v имеет место формула

$$\div(\phi v) = (\operatorname{grad} \phi, v) + \phi \div v. \tag{22}$$

Теорема 6.4. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ – компактная область с гладкой границей, $g(z)|dz|^2$ – произвольная C^3-гладкая конформная метрика на $\overline{U}$. Пусть $u : U \to \mathbb{R}$ – гармоническая функция, C^2- гладкая в замыкании области. Тогда для любой C^2-гладкой функции $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$, совпадающей с u на границе ∂U, имеет место неравенство*

$$\int_U ||\operatorname{grad} u||^2 dVol(g) \leq \int_U ||\operatorname{grad} f||^2 dVol(g)$$

Здесь градиенты взяты относительно метрики g.

Как показано ниже, Теорема 6.4 вытекает из утверждений упражнения и следующего предложения.

Предложение 6.2. *Для всякой C^2- гладкой конформной метрики $g(z)|dz|^2$ на области в $\mathbb{C}$ в окрестности каждой точки O существует конформная координата с центром в точке O, в которой метрика совпадает со стандартной евклидовой с точностью до малых второго порядка.*

Proof. Без ограничения общности считаем, что $O = 0 \in \mathbb{C}$ и $g(0) = 1$, применяя комплексное аффинное преобразование. Имеем

$$g(z) = 1 + az + \bar{a}\bar{z} + O(|z|^2); \quad a = \frac{\partial g}{\partial z}(0) \in \mathbb{C}.$$

Ищем конформную замену координаты $z = z(w) = w + bw^2$, убивающую линейный член метрики. В новой координате метрика записывается следующим образом:

$$g(w + bw^2)(1 + 2bw)(1 + 2\bar{b}\bar{w})|dw|^2 = (1 + aw + \bar{a}\bar{w} + 2bw + 2\bar{b}\bar{w} + O(|w|^2))|dw|^2.$$

Выберем $b = -\frac{a}{2}$. Тогда сумма линейных членов по w в предыдущей правой части обратится в нуль, и метрика запишется как $(1+O(|w|^2))|dw|^2$. Предложение доказано. $\square$

Proof. **Теоремы 6.4.** Применяя рассуждения из доказательства Теоремы 6.3 и формулу (22), получаем формулу (21), где градиент, дивергенция и лапласиан определены для метрики g. Лапласиан функции u (а значит, и второй член в правой части (21)) обращается в нуль, в силу гармоничности функции u, Упражнения 6.1 и Предложения 6.2. Это доказывает L_2-ортогональность градиентов в правой части (21), а вместе с ней и Теорему 6.4, как и в вышеупомянутом доказательстве. □

6.2. **Подготовительный материал 2: пространства Соболева.**

Определение 6.1. *Пусть U – компактная область с гладкой (возможно пустой) границей в гладком римановом многообразии. Пространство Соболева $H^1 = H^1(U)$ – это замыкание пространства ограниченных гладких функций на U в норме, квадрат которой равен*

$$||f||^2_{H^1} = ||f||^2_{L_2(U)} + ||\operatorname{grad} f||^2_{L_2(U)}.$$

Подпространство $H^1_0 = H^1_0(U) \subset H^1$ – это замыкание пространства финитных функций в предыдущей норме.

Замечание 6.2. *В случае, когда на $\overline{U}$ задана непрерывная риманова метрика, точно так же определяется соболевская норма относительно метрики: градиент и его норма берутся в рассматриваемой метрике. Соболевские пространства, отвечающие двум различным метрикам на $\overline{U}$, совпадают и соответствующие нормы эквивалентны.*

Упражнение 6.2. *Для любой последовательности гладких функций f_n, сходящихся к f в норме H^1, градиенты $\operatorname{grad} f_n$ сходятся в L_2 к вектор-функции, обозначаемой $\operatorname{grad} f$ и называемой градиентом функции f, и она зависит только от f а не от выбора последовательности. (На самом деле, можно доказать, что функция f дифференцируема почти всюду и ее градиент действительно равен $\operatorname{grad} f$ почти всюду. Кроме того, $\operatorname{grad} f$ есть ее градиент в смысле обобщенных функций.)*

Упражнение 6.3. *Показать, что пространство Соболева $H^1(S^1)$, $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ состоит в точности из функций $f \in L_2(S^1)$, представимых рядами Фурье $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{ikx}$, такими что ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2(1+|k|^2)$ сходится. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для функций на торе любой размерности.*

Упражнение 6.4. *Показать, что функция $\ln(-\ln|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, принадлежит пространству Соболева H^1 функций на диске $|z| < \frac{1}{2}$.*

Как показывают следующее предложение и упражнение, в отличие от двумерного случая, соболевские функции одной переменной непрерывны и даже гёльдеровы.

Предложение 6.3. *Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – гладкая функция, $M = ||f'||_{L_2[0,1]}$. Тогда*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le M\sqrt{|x_2 - x_1|} \text{ для любых } x_1, x_2 \in [0,1]. \tag{23}$$

Proof. Положим $x_1 = x$, $x_2 = x + \delta$, $0 < \delta < 1$. Имеем

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le \int_x^{x+\delta} |f'(t)|dt \le \sqrt{\delta \int_x^{x+\delta} |f'(t)|^2 dt} \le M\sqrt{\delta}. \tag{24}$$

Первое неравенство следует из формулы Ньютона–Лейбница. Второе – из неравенства Коши–Буняковского, примененного к скалярному произведению функций 1 и f' в пространстве $L_2[x, x+\delta]$. Предложение доказано. □

Упражнение 6.5. *Вывести из Предложения 6.3, что всякая функция f из пространства $H^1[0,1]$ или $H^1(S^1)$, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, гёльдерова с показателем $\frac{1}{2}$ и константой Гёльдера $||f'||_{L_2}$.*

Предложение 6.4. *Пусть U – куб в координатной карте с заданной гладкой римановой метрикой. На пространстве H_0^1 соболевская H^1-норма эквивалентна L_2-норме градиента. А именно, существует константа $c = c(U) > 0$, такая что для любой функции $f \in H_0^1(U)$ справедливо неравенство*

$$||f||_{H^1}^2 \le c||\operatorname{grad} f||_{L_2}^2. \tag{25}$$

Proof. Без ограничения общности будем считать U единичным кубом с евклидовой метрикой, см. Замечание 6.2. Для простоты будем считать куб двумерным: единичным квадратом $U = [0,1]^2$. Достаточно доказать неравенство (25) для гладких функций, обращающихся в нуль на границе квадрата. Итак, пусть $f \in C^\infty(\overline{U})$, $f|_{\partial U} = 0$. Тогда для любой точки $(x,y) \in U$

$$|f(x,y)|^2 = |f(x,y) - f(0,y)|^2 \le |x| ||\frac{\partial f}{\partial x}||_{L_2([0,1]\times\{y\})}^2,$$

по Предложению 6.3. Следовательно, $||f||_{L_2(U)}^2 \le ||\operatorname{grad} f||_{L_2(U)}^2$, по теореме Фубини. Это доказывает Предложение 6.4 для $c = 2$. □

Предложение 6.5. *Пусть $f_n : A \to \mathbb{R}$ – последовательность гладких функций на кольце $A = \{r_1 < |z| < r_2\} \subset \mathbb{C}$, градиенты которых ограничены в $L_2(A)$. Тогда существует последовательность окружностей $S_n^1 \subset A$ с центром в нуле, на которых колебания функций равномерно ограничены. Точнее, существуют последовательности $M_n \in \mathbb{R}$, $r_n \in (r_1, r_2)$ и константа $M > 0$, положим $S_n^1 = \{|z| = r_n\}$, такие что $|f_n - M_n||_{S_n^1} \le M$.*

Proof. Существует последовательность радиусов r_n, таких что L_2-нормы производных функций $f_n|_{S_n^1}$ одной переменной равномерно ограничены (теорема Фубини и ограниченность L_2-норм градиентов на A). Отсюда и из Предложения 6.3 следует утверждение Предложения 6.5. □

Следствие 6.1. *Пусть $f_n : A \to \mathbb{R}$ – последовательность гладких функций на кольце $A = \{r_1 < |z| < r_2\} \subset \mathbb{C}$, ограниченных в $H^1(A)$. Тогда существуют $M > 0$ и последовательность $r_n \in (r_1, r_2)$, положим $S_n^1 = \{|z| = r_n\}$, такие что $|f_n||_{S_n^1} \le M$.*

Proof. Существует последовательность $r_n \in (r_1, r_2)$, такая что нормы $||f_n||_{H^1(S_n^1)}^2$ функций одной переменной равномерно ограничены (теорема Фубини). Отсюда и из их равномерной гёльдеровости (Предложение 6.3) следует их равномерная ограниченность. Следствие доказано. □

Предложение 6.6. *Пусть $f \in H^1(U)$, и на замыкании области U выбрана гладкая конформная метрика. Градиент функции f L_2-ортогонален градиенту любой финитной гладкой функции (относительно рассматриваемой метрики), если и только если функция f гармонична.*

Proof. Пусть $V \Subset U$ – произвольный диск. Если функция f гармонична, то ее градиент ортогонален градиенту любой гладкой функции с носителем в V, в силу формулы (21), применённой к V вместо U, и Упражнения 6.1. Докажем обратное. Пусть функция $f \in H^1(U)$ имеет градиент, ортогональный градиенту любой гладкой функции с носителем в V. Докажем, что она гармонична. Рассмотрим произвольную последовательность f_n C^∞-гладких функций, сходящихся к f в H^1. Для каждого n пусть u_n – непрерывная функция на U, равная f_n вне диска V и гармоническая внутри него. По построению, функция u_n кусочно гладка и принадлежит пространству H^1. Кроме того, $||\operatorname{grad} u_n||_{L_2} \leq ||\operatorname{grad} f_n||_{L_2}$ по Теореме 6.4. Положим $\chi_n = f_n - u_n$. Покажем, что $\chi_n \to 0$ в пространстве H^1. Функции χ_n принадлежат пространству H_0^1, так как они кусочно-гладки на U и равны нулю вне V. Последовательность функций $\chi_n \in H_0^1$ ограничена в норме H^1. Действительно, их градиенты имеют равномерно ограниченные L_2-нормы, так как это же верно для функций f_n и в силу предыдущего неравенства. Отсюда и из Предложения 6.4 следует ограниченность последовательности χ_n в пространстве H^1. Покажем, что $\chi_n \to 0$ в H^1. Имеем

$$||\operatorname{grad}\chi_n||_{L_2}^2 = (\operatorname{grad}\chi_n, \operatorname{grad} f_n)_{L_2} - (\operatorname{grad}\chi_n, \operatorname{grad} u_n)_{L_2} = (\operatorname{grad}\chi_n, \operatorname{grad} f_n)_{L_2} :$$

градиенты $\operatorname{grad}\chi_n$ и $\operatorname{grad} u_n$ ортогональны, так как функция u_n гармонична в V, $\chi_n \in H_0^1(V)$ и по Теореме 6.4. Напомним, что $f_n \to f$ в H^1, и $\operatorname{grad} f$ ортогонален $\operatorname{grad}\chi_n \in H^1$. Значит,

$$(\operatorname{grad}\chi_n, \operatorname{grad} f_n)_{L_2} = (\operatorname{grad}\chi_n, \operatorname{grad}(f_n - f))_{L_2} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

в силу ограниченности последовательности χ_n. Итак, $\chi_n \to 0$ в H^1, а значит, функции $u_n = f_n - \chi_n$, гармонические на V, сходятся к f в $H^1(U)$. Теперь покажем, что последние сходятся равномерно на компактных подмножествах в V (после перехода к подпоследовательности), и тем самым, предел f гармоничен на V. Для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность окружностей $S_n^1 \subset V$, концентричных границе ∂V и ε-близких к ней, таких что функции $u_n|_{S_n^1}$ равномерно ограничены (Следствие 6.1). Отсюда и из гармоничности и Принципа Максимума следует равностепенная непрерывность функций u_n на компактных подмножествах в V, а значит, и равномерная сходимость подходящей подпоследовательности. Это вместе с предыдущим рассуждением доказывает предложение. □

6.3. **Минимизирующие гармонические дифференциалы. Доказательство Теоремы 6.2.** Напомним, что имеется канонический базис в $H_1(\mathcal{P}_g, \mathbb{Z})$, состоящий из $2g$ циклов: "a- и b- циклов". А именно, рассмотрим поверхность $\mathcal{P}_g$ как связную сумму сферы и g торов (ручек) $\mathbb{T}_j^2$, $j = 1, \dots, g$. На каждом подклеенном торе $\mathbb{T}_j^2 = S^1 \times S^1$ рассмотрим две канонические образующие a_j, b_j в $H_1(\mathbb{T}_j^2, \mathbb{Z})$, заданные трансверсальными S^1-слоями. Канонический базис[2] в $H_1(\mathcal{P}_g, \mathbb{Z})$ образован циклами a_j, b_j, $j = 1, \dots, g$. По предположению, рассматриваемый базисный цикл $\alpha \in H_1(\mathcal{P}_g, \mathbb{Z})$ является каноническим базисным циклом (фиксируем соответствующий базис в $H_1(\mathcal{P}_g, \mathbb{Z})$. По вышеприведенному определению, это означает, что поверхность $\mathcal{P}_g$ представляется в виде связной суммы тора $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ и поверхности $\mathcal{P}_{g-1}$ меньшего рода так, что цикл α представляется стандартной образующей, S^1-слоем тора, см. рис. ниже. Будем далее обозначать построенный представитель цикла α тем же символом α. Пусть $W \subset \mathbb{T}^2$ – выкидываемый диск склейки, отвечающий взятию предыдущей связной суммы. Имеется непрерывное отображение $\mathcal{P}_g \to \mathbb{T}^2$, тождественное на $\mathbb{T}^2 \setminus W$ и схлопывающее поверхность

[2]Более общее, инвариантное определение канонического базиса $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ в $H_1(\mathcal{P}_g, \mathbb{Z})$: требуется, чтобы это был канонический базис в смысле кососимметрической формы на $H_1(\mathcal{P}_g, \mathbb{Z})$, заданной индексом пересечения $<, >$. А именно, $< a_i, a_j >=< b_i, b_j >= 0$, $< a_i, b_j >= \delta_{ij}$ для любых $i, j = 1, \dots, g$.

$\mathbb{P}_{g-1}$ (с выкинутым диском) на диск W. Его композиция с проекцией тора $\mathbb{T}^2 \to S^1$ на образующую α, есть непрерывное отображение $\phi : \mathcal{P}_g \to S^1$, гомеоморфно отображающее α на окружность и зануляющее остальные элементы рассматриваемого базиса в $H_1(\mathcal{P}_g, \mathbb{Z})$, см. тот же рисунок. Обозначим

$$\mathcal{M}_\alpha = \{\psi \in C^\infty(\mathcal{P}_g \to S^1) \mid \psi \text{ гомотопно } \phi\}.$$

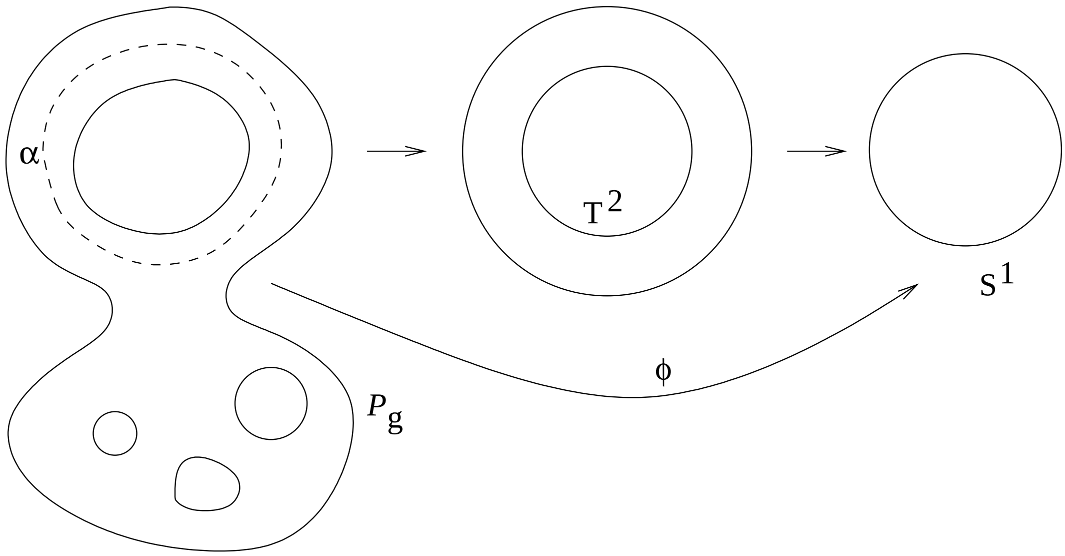


Рис. 9. Представитель базисного цикла α и соответствующее ему отображение $\phi : \mathcal{P}_g \to S^1$

Фиксируем гладкую конформную метрику h на $\mathcal{P}_g$. Будем искать гармоническое отображение в пространстве $\mathcal{M}_\alpha$ как отображение, минимизирующее L_2-норму градиента:

$$||\operatorname{grad}\psi||^2_{L_2} = \int_{\mathcal{P}_g} |\operatorname{grad}\psi|^2 dVol \to \inf;\ \psi \in \mathcal{M}_\alpha.$$

Для этого мы покажем, что подходящим образом выбранная минимизирующая последовательность отображений $\psi_n \in \mathcal{M}_\alpha$ сходится (после перехода к подпоследовательности), и предел – гармоническое отображение. Для нормировки и исследования сходимости мы рассмотрим накрытие $p : \widetilde{\mathcal{P}_g} \to \mathcal{P}_g$ с циклической группой накрывающих преобразований, порожденной замкнутой кривой α как элементом фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{P}_g)$. Будем рассматривать поднятия $\widetilde{\psi} : \widetilde{\mathcal{P}_g} \to \mathbb{R}$ отображений $\psi \in \mathcal{M}_\alpha$. Пусть $T : \widetilde{\mathcal{P}_g} \to \widetilde{\mathcal{P}_g}$ – накрывающее преобразование, отвечающее пути α. Всякое поднятие $\widetilde{\psi}$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{\psi}(Tx) = \widetilde{\psi}(x) + 1 \tag{26}$$

и обратно: всякое гладкое отображение $\widetilde{\psi} : \widetilde{\mathcal{P}_g} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее уравнению (26), является поднятием отображения $\psi \in \mathcal{M}_\alpha$. Обозначим

$$m = \inf\{||\operatorname{grad}\psi||^2_{L_2} \mid \psi \in \mathcal{M}_\alpha\}.$$

Предложение 6.7. *Существуют последовательности гладких отображений $\psi_n \in \mathcal{M}_\alpha$ и соответствующих поднятий $\widetilde{\psi}_n$, такие что*

$$||\operatorname{grad}\psi_n||^2_{L_2} \to m \text{ при } n \to \infty$$

и поднятия $\widetilde{\psi}_n$ равномерно ограничены на каждом компактном подмножестве $K \Subset \widetilde{\mathcal{P}_g}$ в соболевской норме $H^1(K)$.

Proof. Фиксируем кольцо $A \simeq S^1 \times [0,1] \subset \mathcal{P}_g$, лежащее на торической ручке, содержащей кривую α, так чтобы каждый его S^1-слой пересекал α ровно один раз. Отождествим его с некоторым его фиксированным поднятием: кольцом на $\widetilde{\mathcal{P}_g}$, диффеоморфно проектирующемся на A. Пусть $\psi_n \in \mathcal{M}_\alpha$ – произвольная минимизирующая последовательность для L_2-нормы градиента, $\widetilde{\psi}_n$ – их поднятия. Существуют $c > 0$ и последовательности слоев $S^1_n \subset A$ и чисел $M_n \in \mathbb{R}$, такие что $|\widetilde{\psi}_n - M_n||_{S^1_n} \leq c$ для всех n (Предложение 6.5). Без ограничения общности будем считать, что $M_n = 0$, так как $\widetilde{\psi}_n - M_n$ также суть поднятия минимизирующей последовательности с теми же градиентами. Итак, $|\widetilde{\psi}_n||_{S^1_n} < c$. Пусть $F \subset \widetilde{\mathcal{P}_g}$ – фундаментальная область для накрывающего преобразования T, ограниченная окружностями S^1_n и $T(S^1_n)$. Мы утверждаем, что не увеличивая норм градиентов функций $\widetilde{\psi}_n$, можно добиться того, чтобы

$$|\widetilde{\psi}_n(T^k(x)) - k| < c' = 3c + 2 \text{ для любых } x \in F \text{ и } k \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

Действительно, неравенство (27) с правой частью $c'' = c + 1$ выполнено при всех $x \in S^1_n$ и $k \in \mathbb{Z}$, по определению. Значит, неравенство (27) выполнено на $T(S^1_n)$, в силу (26), и тем самым, на всей границе фундаментальной области F. Достаточно добиться того, чтобы оно было выполнено на F при $k = 0$: тогда его справедливость при всех k следует из (26). Обозначим $V_n = (\widetilde{\psi}_n|_F)^{-1}(\{|y| > c'\}) \Subset F$. Если $V_n = \emptyset$, то неравенство (27) выполнено. В противном случае V_n – это объединение областей, где либо $\widetilde{\psi}_n > c'$, либо $\widetilde{\psi}_n < -c'$. Заменим ограничения функции $\widetilde{\psi}_n$ на последние области на соответствующую константу $\pm c'$. Мы получим кусочно-гладкую функцию χ_n, норма градиента которой меньше нормы градиента исходной функции $\widetilde{\psi}_n$ на некоторое $\varepsilon_n > 0$. Сглаживанием функций χ_n на границах, так чтобы норма градиента возросла не более чем на ε_n, получим искомую новую минимизирующую последовательность гладких функций $\widetilde{\psi}_n$, удовлетворяющих неравенству (27). L_2-нормы их градиентов на компактах равномерно ограничены по построению, а L_2-нормы самих функций на компактах равномерно ограничены, как и сами функции (неравенство (27)). Тем самым, построена минимизирующая последовательность поднятий, равномерно ограниченная в соболевской норме на компактах. Предложение доказано. □

Следствие 6.2. *Последовательность $\widetilde{\psi}_n$ из предыдущего предложения (после перехода к подпоследовательности) слабо сходится в гильбертовом пространстве $H^1(K)$ на каждом компакте $K \Subset \widetilde{\mathcal{P}_g}$ к функции $\widetilde{u} : \widetilde{\mathcal{P}_g} \to \mathbb{R}$, H^1-соболевской на компактах. Предел $\widetilde{u}$ является поднятием соболевского отображения $u : \mathcal{P}_g \to S^1$, минимизирующего L_2-норму градиента: $||\operatorname{grad} u||^2_{L_2} = m$.*

Proof. Слабая сходимость подпоследовательности функций $\widetilde{u}_n$ в гильбертовом пространстве H^1 следует из её ограниченности. Последняя, в свою очередь, вытекает из предыдущего предложения. Норма градиента слабого предела не превосходит нижнего предела норм градиентов, т.е. m. Слабый предел удовлетворяет уравнению (26), как и сходящиеся функции (следует из слабой сходимости по определению). Следовательно, предел является поднятием соболевского отображения $u : \mathcal{P}_g \to S^1$, минимизирующего норму градиента. Следствие доказано. □

Предложение 6.8. *Градиент отображения u из предыдущего следствия L_2-ортогонален градиенту всякой гладкой функции $\mathcal{P}_g \to \mathbb{R}$ с носителем в произвольном координатном диске.*

Proof. Предположим противное: существует гладкая функция $f : \mathcal{P}_g \to \mathbb{R}$ с носителем в координатном диске, такая что $(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} f) < 0$. Имеем

$$||\operatorname{grad}(u + \varepsilon f)||^2_{L_2} = m^2 + \varepsilon(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} f) + O(\varepsilon^2) < m^2 \text{ при малых } \varepsilon > 0.$$

Тем самым, мы построили соболевское отображение $u + \varepsilon f : \mathcal{P}_g \to S^1$, норма градиента которого меньше m. Оно может быть приближена гладким отображением χ, удовлетворяющим той же оценке, по определению пространства Соболева. Построенное отображение χ принадлежим пространству $\mathcal{M}_\alpha$ и имеет норму градиента меньше m. Полученное противоречие доказывает предложение. □

Построенное отображение $u : \mathcal{P}_g \to S^1$ в Следствии 6.2 гармонично (Предложения 6.6 и 6.8). Его поднятие также гармонично и удовлетворяет уравнению (26), по построению. Следовательно, $u \in \mathcal{M}_\alpha$. Теорема 6.2 доказана.

6.4. **Мероморфные дифференциалы.** Теперь мы докажем следующие две теоремы о существовании мероморфных дифференциалов (т.е. 1-форм).

Теорема 6.5. *На любой замкнутой римановой поверхности существует мероморфный дифференциал с единственным полюсом в произвольной точке поверхности. Порядок полюса может быть любым числом, большим 1.*

Теорема 6.6. *На любой замкнутой римановой поверхности существует мероморфный дифференциал с двумя простыми полюсами в двух произвольных различных точках поверхности.*

Упражнение 6.6. *Доказать обе теоремы для случая тора: дать прямое доказательство.*

Proof. **Теоремы 6.5.** Пусть $\mathcal{P}_g$ – замкнутая риманова поверхность. Будем считать, что ее род g не меньше 2 (см. предыдущее упражнение). Пусть $O \in \mathcal{P}_g$, z – локальная голоморфная координата с началом в точке O. Будем считать, что $\mathcal{P}_g$ содержит замкнутый единичный диск в координате z. Фиксируем произвольное $k \geq 1$. Мы построим гармоническую функцию $u : \mathcal{P}_g \setminus O \to \mathbb{R}$, такую что $u(z) = \operatorname{Re}(\frac{1}{z^k}) + O(1)$ в окрестности точки O при $z \to 0$. Искомый мероморфный дифференциал будет голоморфным дифференциалом ω на $\mathcal{P}_g \setminus O$, вещественная часть которого равна du. Он существует и имеет вид $\omega = (\frac{k}{z^{k+1}} + O(1))dz$ в окрестности точки O, в силу Замечания 6.1 и локального вида функции u.

Обозначим через $u_r : \mathcal{P}_g \setminus \overline{D_r} \to \mathbb{R}$ гармоническую функцию на дополнении диска радиуса r, непрерывную вплоть до границы и равную $\operatorname{Re}(\frac{1}{z^k})$ на границе. Существование функций u_r следует из Теоремы 3.8, см. доказательство теоремы об униформизации. Покажем, что после прибавления аддитивных констант к функциям u_r и перехода к подпоследовательности получим последовательность гармонических функций, сходящихся к искомой функции u.

Предложение 6.9. *Существует такое семейство чисел $M_r \in \mathbb{R}$, что после перехода к подпоследовательности $r_n \to 0$ функции $u_{r_n} - M_{r_n}$ равномерно сходятся на компактных подмножествах в $\mathcal{P}_g \setminus O$.*

Proof. Фиксируем произвольную гладкую конформную метрику h на поверхности $\mathcal{P}_g \backslash O$, которая в единичном координатном диске имеет вид $|z|^{-2(k+1)}|dz|^2$. Для любого $r > 0$ обозначим

$$\mathcal{P}_g(r) = \mathcal{P}_g \setminus \overline{D_r},\ A_r = \{r < |z| < 1\} \subset \mathcal{P}_g(r).$$

Каждая функция u_r минимизирует L_2-норму градиента на области $\mathcal{P}_g(r)$ относительно метрики h в классе гладких функций, равных $\mathrm{Re}(\frac{1}{z^k})$ на границе. С другой стороны, функция $f(z) = \mathrm{Re}(\frac{1}{z^k})$ гладка и имеет равномерно ограниченные L_2-нормы градиентов на кольцах A_r, по определению и в силу выбора метрики, и $|f||_{\partial D_1} \leq 1$. Функция f очевидным образом гладко продолжается на дополнение $\mathcal{P}_g(1) = \mathcal{P}_g(r) \setminus A_r$ с равномерными оценками на норму градиента (разбиение единицы). Нормы градиентов функций u_r на $\mathcal{P}_g(r)$ равномерно ограничены, так как не превосходят равномерно ограниченных норм градиентов $\mathrm{grad}\, f$ (Теорема 6.4). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют $c = c(\varepsilon) > 0$ и семейство чисел $M_r = M_r(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, такие что для любого $r < \frac{\varepsilon}{2}$ существует окружность $S^1_r \subset \{\frac{\varepsilon}{2} < |z| < \varepsilon\}$ с центром в нуле, такая что $|u_r|_{S^1_r} - M_r| < c$ (Предложение 6.5). А значит,

$$|u_r(x) - M_r| < c \text{ для любого } x \in \mathcal{P}_g(\varepsilon), \tag{28}$$

по Принципу Максимума. Отсюда следует, что существует семейство чисел $M_r \in \mathbb{R}$, такое что гармонические функции $v_r = u_r - M_r$ равномерно ограничены на компактных подмножествах в $\mathcal{P}_g \setminus O$. Действительно, для данного ε соответствующее семейство констант $M_r(\varepsilon)$ определено однозначно с точностью прибавления равномерно ограниченных констант, и поэтому, для любых двух различных ε соответствующие M_r отличаются на добавку, равномерно ограниченную по r. Итак, переходя к подпоследовательности $r_n \to 0$, получим последовательность гармонических функций v_{r_n}, равномерно сходящуюся на компактных подмножествах. □

Обозначим

$$u = \lim_{n\to\infty} v_{r_n}.$$

Функция u гармонична на $\mathcal{P}_g \setminus O$, как и функции v_n. Докажем, что функция u имеет требуемую асимптотику в точке O. Для этого рассмотрим вспомагательные гармонические функции

$$\chi_n(z) = v_{r_n}(z) - \mathrm{Re}(\frac{1}{z^k}) + M_{r_n}(\ln r_n)^{-1} \ln|z|, \quad z \in A_{r_n}.$$

Напомним, что функции v_{r_n} равномерно ограничены на компактных подмножествах в проколотой поверхности: в частности, существует $c > 0$, такое что $|v_{r_n}||_{\partial D_1} < c$ для всех n. Функции $\chi_n|_{\partial A_{r_n}}$ равномерно ограничены:

$$|\chi_n(z)||_{|z|=1} = |v_{r_n}(z) - \mathrm{Re}(\frac{1}{z^k})| \leq c + 1;$$

$$\chi_n(z)|_{|z|=r_n} = u_{r_n}(z) - M_{r_n} + M_{r_n} - \mathrm{Re}(\frac{1}{z^k}) = 0.$$

Следовательно, $|\chi_n|_{A_{r_n}} \leq c + 1$ (Принцип Максимума), и после перехода к подпоследовательности, функции χ_n равномерно сходятся на компактных подмножествах в $\overline{D_1} \setminus 0$ к ограниченной функции χ, гармонической в диске D_1 по теореме об устранимой особенности. Итак, переходя к подпоследовательности, будем считать, что

$$v_{r_n} \to u,\ \chi_n = v_{r_n} - \mathrm{Re}(\frac{1}{z^k}) + M_{r_n}(\ln r_n)^{-1}\ln|z| \to \chi,$$

где χ – ограниченная гармоническая функция в D_1. Отсюда следует, что последовательность $M_{r_n}(\ln r_n)^{-1}$ сходится к некоторому конечному пределу L, и

$$u(z) = \mathrm{Re}(\frac{1}{z^k}) - L\ln|z| + \chi(z). \tag{29}$$

Голоморфный дифференциал ω на $\mathcal{P}_g \setminus O$, вещественная часть которого равна du, – это искомый мероморфный дифференциал[3] Теорема 6.5 доказана. □

Proof. **Теоремы 6.6.** Выберем две произвольные точки $A \neq B \in \mathcal{P}_g$ и докажем существование гармонической функции u на $\mathcal{P}_g \setminus \{A, B\}$ с логарифмическими особенностями в точках A и B, такими как у функции Грина, умноженной на константу. Искомый мероморфный дифференциал будет голоморфным дифференциалом на проколотой поверхности, вещественная часть которого есть du.

Построение функции u аналогично доказательству Теоремы 6.5. Введем две локальные голоморфные координаты z, w с центром в точках A и B, соответственно, так что поверхность $\mathcal{P}_g$ содержит соответствующие замкнутые единичные координатные диски, и последние не пересекаются. Для любого $r > 0$ обозначим, соответственно, через $D_r(A), D_r(B) \subset \mathcal{P}_g$ диски радиуса r с центрами A и B в предыдущих координатах и положим $\mathcal{P}_g(r) = \mathcal{P}_g \setminus (D_r(A) \cup D_r(B))$. Для любого малого $r > 0$ обозначим через $u_r : \mathcal{P}_g(r) \to \mathbb{R}$ – гармоническую функцию с граничными значениями

$$u_r|_{\partial D_r(A)} = -\ln r, \quad u_r|_{\partial D_r(B)} = \ln r.$$

Рассмотрим метрику $\frac{1}{|z|^2}|dz|^2$, $\frac{1}{|w|^2}|dw|^2$ в единичных дисках с центрами A и B и продолжим ее до гладкой конформной метрики на проколотой поверхности $\mathcal{P}_g \setminus \{A, B\}$. Градиенты функций u_r в рассматриваемой метрике имеют равномерно ограниченные L_2-нормы на $\mathcal{P}_g(r)$, как и в доказательстве Теоремы 6.5. Точно так же получаем, что существует семейство констант $M_r \in \mathbb{R}$, такое что гармонические функции $v_r = u_r - M_r$ равномерно ограничены на компактных подмножествах в проколотой поверхности. Следовательно, для некоторой последовательности $r_n \to 0$ функции v_{r_n} равномерно сходятся на компактных подмножествах к гармонической функции $u : \mathcal{P}_g \setminus \{A, B\} \to \mathbb{R}$. Покажем, что предел имеет логарифмические особенности в точках A и B. Докажем это утверждение для точки A (случай точки B симметричен). Для этого рассмотрим вспомагательную функцию

$$\chi_n(z) = v_{r_n}(z) + c_n \ln|z| = u_{r_n}(z) - M_{r_n} + c_n \ln|z|,\ c_n = M_{r_n}(\ln r_n)^{-1} + 1.$$

Их ограничения на кольца $A_{r_n} = \{r_n < |z| < 1\}$ равномерно ограничены, по Принципу Максимума и так как

$$\chi_n|_{|z|=r_n} = -\ln r_n - M_{r_n} + (M_{r_n}(\ln r_n)^{-1} + 1)\ln r_n = 0;\ \chi_n|_{|z|=1} = v_{r_n},$$

а функции $v_{r_n}|_{|z|=1}$ равномерно ограничены по построению. Итак, на кольцах A_{r_n}, исчерпывающих проколотый диск с центром A, функция v_{r_n} равна $-c_n \ln|z|$,

[3]Функция u также является искомой, так как на самом деле, $L = 0$. Действительно, в противном случае ω имел бы ненулевой вычет в своем единственном полюсе, что не возможно: сумма вычетов мероморфного дифференциала на компактной римановой поверхности всегда равна нулю.

с точностью до равномерно ограниченной добавки χ_n. Последовательность c_n равномерно ограничена, в силу предыдущего утверждения и равномерной ограниченности последовательности функций v_{r_n} на компактных подмножествах. Тем самым, переходя к подпоследовательности, будем считать, что $c_n \to c \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$. По построению, $u(z) = -c \ln |z| + \chi(z)$, где χ – гармоническая функция в окрестности точки A, как и в доказательстве Теоремы 6.5. Аналогично получаем, что в соответствующих кольцах в окрестности точки B функция v_{r_n} равна $(2-c_n)\ln|z|$ с точностью до равномерно ограниченной добавки, и $u(z) = (2-c)\ln|z| + \widetilde{\chi}(z)$, где $\widetilde{\chi}$ – гармоническая функция в окрестности точки B. Заметим, что хотя бы одно из чисел c и $c-2$ отлично от нуля: пусть $c \neq 0$. Пусть ω – голоморфный дифференциал на проколотой поверхности с вещественной частью du. По построению, он мероморфен на поверхности $\mathcal{P}_g$, имеет полюс первого порядка в точке A с вычетом $-c$ и полюс не более первого порядка в точке B с вычетом $2-c$. Сумма вычетов должна быть равна нулю, так как поверхность компактна. Значит, $c = 1$, и дифференциал ω имеет простые полюса в обеих точках A и B с вычетами ± 1. Теорема 6.6 доказана. □

7. Комплексные алгебраические кривые.

7.1. **От алгебраических кривых к римановым поверхностям.** На первой лекции мы обсуждали, что каждой плоской алгебраической кривой соответствует риманова поверхность. Обсудим это соответствие более подробно.

Отвечающее многочлену $F(z,w)$ множество точек $P_F = \{((z,w) \in \mathbb{C}^2 | F(z,w) = 0\}$ называется *плоской аффинной комплексной алгебраической кривой.*

Для плоской аффинной комплексной алгебраической кривой выполняется голоморфный голоморфный аналог теоремы о неявной функции.

Теорема 7.1. *Пусть $F(z_0,w_0) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0$. Тогда в окрестности точки z_0 существует и единственна однолистная голоморфная функция $w = w(z)$ такая что $w_0 = w(z_0)$ и $F(z,w(z)) = 0$.*

Proof. Пусть $z = x+iy$, $w = u+iv$, $F = f+ih$. Если рассматривать функцию $F(z_0,w)$ как отображение $(u,v) \mapsto (f,h)$, то ее якобиан имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & -\frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} = \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right|^2$$

и, следовательно, не равен 0 в точке w_0. Поэтому, согласно теореме о неявном отображении, в окрестности точки z_0 существуют функции $u = u(z) = u(x,y)$ и $v = v(z) = v(x,y)$ такие что $F(z,w(z,\bar{z})) = F(z,w(x,y)) = 0$. Кроме того $0 = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$. Неравенство $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$ влечет $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ и, значит, функция $w(z)$ голоморфна. □

Следствие 7.1. *В окрестности точки (z_0,w_0), где $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0$, отображение $z \mapsto (z,w(z)))$ задает локальную карту на P_F. Множество всех таких карт образует голоморфный атлас на множестве $P_F - \Sigma_w$, где $\Sigma_w = \{(z,w) \in P_F | \frac{\partial F}{\partial w}(z,w) \neq 0\}$*

Аналогичным образом определяется голоморфный атлас локальных карт на $P_F - \Sigma_z$, где $\Sigma_z = \{(z,w) \in P_F | \frac{\partial F}{\partial z}(z,w) \neq 0\}$

Задача 7.1. *Доказать, что эти атласы эквивалентны на $P_F - (\Sigma_z \bigcup \Sigma_w)$.*

Кривая P_F называется *неособой*, если $|\frac{\partial F}{\partial x}(z,w)| + |\frac{\partial F}{\partial y}(z,w)| > 0$ для всех $\{(z,w) \in \mathbb{C}|F(z,w) = 0\}$. В этом случае построенные выше атласы задают на P_F структуру римановой поверхности. Многообразие P_F, однако, не компактно. Ни к одной из ее точек не сходится, в частности, последовательность $\{(z_n,w_n) \in \mathbb{C}|F(z_n,w_n) = 0\}$, где $z_n \to \infty$. Для того чтобы компактифицировать множество P_F рассмотрим множество контуров $c_R = \{z \in \mathbb{C}||z| > R\}$, где число R больше модуля любого критического значения функции $h(z,w) = z$ на P_F. Множество $h^{-1}(c_R)$, без ветвлений накрывает цилиндр c_R. Продолжим это накрытие до отображения $f^{-1}(c_R) \cup D \to c_R \cup \infty$, добавив по точке к каждой компоненте связности прообраза $h^{-1}(c_R)$. Это продолжение вместе с отображением h порождает отображение $\tilde{h} : P \to \overline{\mathbb{C}}$ компактной поверхности $\bar{P}_F = P_F \bigcup D$ на сферу Римана.

Задача 7.2. *Доказать, что поверхность $\overline{P}_F$ обладает структурой компактной римановой поверхности относительно которой $\tilde{h}$ — голоморфное отображение.*

Задача 7.3. *Доказать, что любая рациональная функция $R(z,w)$ порождает мероморфную функцию на $\overline{P}_F$.*

Риманова поверхность $\overline{P}_F$ называется *римановой поверхностью многочлена F* Совокупность многочленов, порождающих одну и ту же риманову поверхность называется *комплексной алгебраической кривой.* Далее мы покажем, что любой римановой поверхности отвечает некоторая комплексная алгебраическая кривая.

7.2. **Мероморфные дифференциалы.** *Мероморфным дифференциалом* на римановой поверхности P называется семейство мероморфных функций на локальных картах $\omega = \{f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}|\alpha \in \mathcal{A}\}$ такое, что $\frac{f_\alpha}{f_\beta} = (z_\beta z_\alpha^{-1})'_{z_\alpha}$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta$. Другими словами, мероморфный дифференциал согласованным образом сопоставляет каждой локальной карте (U_α, z_α) мероморфный дифференциал $f_\alpha dz_\alpha$ так, что $f_\alpha dz_\alpha = f_\beta dz_\beta$ на $U_\alpha \bigcup U_\beta$. Нетрудно видеть, что мероморфные дифференциалы (как и мероморфные функции) образуют векторное пространство над полем комплексных чисел.

Задача 7.4. *Доказать, что определение мероморфного дифференциала зависит лишь от римановой поверхности. Другими словами, для каждого эквивалентного голоморфного атласа локальных карт $\{(V_\beta, w_\beta)|\beta \in \mathcal{B}\}$ существует однозначно определенный голоморфный дифференциал $h_\alpha dw_\alpha$ такой что $\frac{f_\alpha}{h_\beta} = (w_\beta z_\alpha^{-1})'_{z_\alpha}$ на $U_\alpha \bigcap V_\beta$.*

Если $f_\alpha(p) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i(z_\alpha(p))^i$, $a_k \neq 0$ и $k < 0$, то точка p называется *полюсом мероморфного дифференциала ω*, а число $-k$ — *порядком полюса.* Мероморфный дифференциал без полюсов называется *голоморфным дифференциалом.*

Задача 7.5. *Доказать, что множество полюсов мероморфного дифференциала и их порядки не меняются при замене голоморфного атласа локальных карт на эквивалентный.*

Мы будем использовать следующую теорему, доказанную в предыдущем разделе

Теорема 7.2. *Пусть P — произвольная Риманова поверхность рода g. Тогда: 1) на P существует g линейно независимых голоморфных дифференциалов; 2) для любой точки $p \in P$ и целого $k > 1$ существует мероморфный дифференциал с* *единственным полюсом порядка k в точке p; 3) для любой пары точек $p_1 \neq p_2 \in P$ существует мероморфный дифференциал, имеющий в точках p_1 и p_2 полюса первого порядка и не имеющий других полюсов.*

Задача 7.6. *Доказать, что дифференциал, описанный в пункте 2), представляется в виде $(\frac{1}{z^k} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i)dz$ для некоторой локальной карты z в окрестности точки p.*

Задача 7.7. *Рассмотрим риманову поверхность $P_F = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{C}}^2 | F(x, y) = 0\}$ гиперэллиптической кривой $F(x, y) = y^2 - (x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + ... + a_1 x + a_0)$. Доказать, что для любого многочлена $g(x)$ формула $\omega = \frac{g(x)dx}{y}$ описывает мероморфный дифференциал на P_F. Найти полюса этого дифференциала и их порядки.*

7.3. От римановых поверхностей к алгебраическим кривым.

Лемма 7.1. *Пусть $f, h : P \to \overline{\mathbb{C}}$ — мероморфные функции степени n на римановой поверхности P. Тогда существуют рациональные функции $r_k : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} (k = 1, ..., n)$ такие, что $f^n + r_1(h)f^{n-1} + ... + r_{n-1}(h)f + r_n(h) = 0$ на P.*

Proof. Рассмотрим симметрические функции $\sigma_k(x_1, ..., x_n) = (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_k} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$. Для $z \in \overline{\mathbb{C}}$ и $\bigcup p_i(z) = h^{-1}(z)$ положим $r_k(z) = \sigma_k(f(p_1(z)), ..., f(p_n(z)))$. (Это определение корректно, поскольку $\sigma_k(f(p_1(z)), ..., f(p_n(z)))$ не зависит от нумерации точек множества $h^{-1}(z)$.) Тогда $r_k(h(p)) = \sigma_k(f(p_1(h(p))), ..., f(p_n(h(p))))$. Следовательно, согласно теореме Виета, $(f^n + r_1(h)f^{n-1} + ... + r_{n-1}(h)f + r_n(h))(p) = (f(p) - f(p_1(h(p))))$ $(f(p) - f(p_2(h(p))))...(f(p) - f(p_n(h(p)))) = 0$ при $p \in P$. ☐

Многочлен от двух переменных $F(z, w)$ называется *приводимым*, если представляется в виде произведения двух многочленов положительной степени по z, коэффициенты которых являются рациональными функциями от w.

Задача 7.8. *Докажите, что полином риманова поверхность неособого приводимого полинома несвязна.*

Теорема 7.3. *Пусть $z : P \to \overline{\mathbb{C}}$ — мероморфная функция на связной римановой поверхности P. Тогда существуют мероморфная функция $f : P \to \overline{\mathbb{C}}$ и неприводимый неособый полином $F(x, y)$ такие, что $F(f, z) = 0$ на P.*

Proof. Пусть n — степень функции z и $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ — ее некритическое значение. Тогда $z^{-1}(z_0) = \cup_{i=1}^n p_i$, где $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим мероморфный дифференциал ω_i, голоморфный вне p_i и равный $(\frac{1}{(z-z_0)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n}(z - z_0)^n)dz$ в окрестности точки p_i. Рассмотрим мероморфную функцию $f(p) = (z(p) - z_0)^2(c_1 \frac{\omega_1}{dz} + ... + c_n \frac{\omega_n}{dz})$, где $c_i \neq c_j$. Тогда $f(p_i) = c_i$. Рассмотрим, существующий согласно предыдущей лемме, многочлен $F(x, y)$ степени n по x такой что $F(f, z) = 0$ на P.

Докажем ,что он неприводим. Пусть $F = F^1 F^2$, где $F^1(x, y)$ и $F^2(x, y)$ — многочлены положительной степени по x, коэффициенты которых являются рациональными функциями от y. Предположим что $F^1(f(p_1), z(p_1)) = 0$. Рассмотрим определенную в окрестности точки z_0 функцию $H(u)$ такую, что $H(f(p)) = z(p)$ в окрестности точки p_1. Тогда $F^1(u, H(u)) = 0$.

Рассмотрим путь $\Gamma_i \in P$, соединяющий точки p_1 и p_i. Положим $\gamma_i = f(\Gamma_i)$ и рассмотрим аналитическое продолжение функции $H(u)$ вдоль пути γ_i. В результате в окрестности точки $c_i = f(p_i)$ мы получаем голоморфную функцию $\tilde{H}(\tilde{u})$ такую что $F_1(\tilde{u}, \tilde{H}(\tilde{u})) = 0$, откуда $F_1(c_i, z_0) = F_1(f(p_i), z(p_i)) = 0$. Таким образом многочлен $F^1(x, y)$ степени n по x и следовательно многочлен $F^2(x, y)$ степени 0 по x. $\square$

Задача 7.9. *Докажите, что полином $F(x, y)$ неособый для набора чисел $\{c_i\}$ общего положения.*

Следствие 7.2. *Всякая связная компактная риманова поверхность является римановой поверхностью некоторой неособой неприводимой плоской аффинной комплексной алгебраической кривой.*

7.4. **Поле алгебраических функций.**

Теорема 7.4. *Пусть P — риманова поверхность неприводимого многочлена $F(x, y)$ и $h : P \to \overline{\mathbb{C}}$ — мероморфная функция. Тогда существует рациональная функция $R(x, y)$ такая, что $h(p) = R(x(p), y(p))$.*

Proof. Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ и $h^{-1}(x_0) = \cup_{i=1}^n p_i$, где $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим $\Phi(y) = \Phi_{x_0}(y) = F(x_0, y) = (y - y(p_1))...(y - y(p_n))$. Многочлены $\Phi(y)$ и $\Phi'(y)$ взаимно просты ввиду неприводимости F. Следовательно существуют многочлены $H(y) = H_{x_0}(y)$ и $L(y) = L_{x_0}(y)$ такие что $H\Phi' + L\Phi = 1$ и, в частности, $H(y(p_i))\Phi'(y(p_i)) = 1$. Положим $G(y) = G_{x_0}(y) = (\frac{h(p_1)}{y - y(p_1)} + ... + \frac{h(p_n)}{y - y(p_n)})\Phi(y)$. Тогда $h(p_i) = \frac{G(y(p_i))}{\Phi'(y(p_i))} = \frac{H(y(p_i))G(y(p_i))}{H(y(p_i))\Phi'(y(p_i))} = G(y(p_i))H(y(p_i))$. Функции G_{x_0} и H_{x_0} являются многочленами с коэффициентами, рационально зависящими от x_0. Таким образом функция $R(x, y) = G_x(y)H_x(y)$ рациональна. Кроме того $h(p) = R(x(p), y(p))$. $\square$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{M}$ над $\mathbb{C}$, свободно порожденную (мультипликативными) образующими x и y. Ее элементы можно рассматривать как комплексные многочлены $F(x, y)$. Каждый из них порождает идеал $I(F)$. Из предыдущей теоремы следует.

Следствие 7.3. *Поле $\mathcal{M}(P)$ мероморфных функций на римановой поверхности P естественно изоморфно полю $\mathcal{M}(F) = \mathcal{M}/I(F)$, где $F(x, y)$ — неприводимый многочлен, риманова поверхность которого изоморфна P. Идеал $I(F)$ отождествляется при этом с идеалом $I(P) \subset \mathcal{M}$ многочленов, порождающих на P нулевую функцию.*

Следствие 7.4. *Неприводимый многочлен $F(x, y)$ порождает связное многообразие $\bar{P}_F$.*

Proof. Предположим, что поверхность $P = \bar{P}_F$ распадается на компоненты связности $P_1 = \bar{P}_{F_1}$ и $P_2 = \bar{P}_{F_2}$. Как уже доказано поле $\mathcal{M}(P_i)$ отождествляется с полем $\mathcal{M}(F_i)$, где F_i — неприводимый многочлен. Идеал $I(F_i)$ совпадает с идеалом многочленов, порождающих на P_i нулевую функцию. Следовательно $I(F) \subset I(F_i)$ и $F = G_iF_i$, где $G_i \in \mathcal{M}(F)$. Таким образом $F = GF_1F_2$ где $G \in \mathcal{M}(F)$. $\square$

Задача 7.10. *Докажите, категория связных римановых поверхностей изоморфна категории неприводимых многочленов $F(x, y)$ над $\mathbb{C}$ где морфизмы порождаются рациональными заменами переменных $z \mapsto \tilde{z}(z, w)$, $w \mapsto \tilde{w}(z, w)$.*

Категория неприводимых многочленов может исследоваться чисто алгебраическими методами. Таким образом многие геометрические результаты о римановых поверхностях могут быть переписаны в чисто алгебраических терминах. В этой формулировке многие результаты остаются верными при замене поля комплексных чисел на произвольное алгебраически замкнутое поле, например на поле алгебраических чисел. Это позволяет развивать теорию чисел с помощью геометрических идей теории римановых поверхностей.

References

[1] Альфорс, Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М. Мир, 1969.

[2] Альфорс, Л.; Берс, Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. Издательство иностранной литературы, 1961.

[3] Натанзон, С.М. Инвариантные прямые фуксовых групп. УМН, n.27 (1972) №4 стр. 145-160.

[4] Натанзон, С.М. Пространства модулей римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналоги. Москва, МЦНМО, 2003.

[5] Натанзон, С.М. Курс комплексного анализа. Москва, МЦНМО, 2012.

[6] S. Natanzon, *Towards an effectivization of the Riemann theorem*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005) 233-255.

[7] A. Glutsyuk. Simple proofs of uniformization theorems. Fields Institute Communications, Vol. 53 (2008), 125–143.

[8] M.Heins. The conformal mapping of simply-connected Riemann surfaces. Ann. of Math. **50** (1949), No. 3, 686–690.

[9] J.Hubbard. Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics. Vol.1; Teichmuller theory. Matrix Editions, 2006.

[10] C. McMullen. Riemann surfaces, dynamics and geometry. Course notes. Harward, 2014: http://www.math.harvard.edu/ ctm/home/text/class/harvard/275/09/html/base/rs/rs.pdf

[11] Sébastien Picard. The Uniformization Theorem. Notes of lectures. http://www.math.mcgill.ca/gantumur/math580f11/downloads/uniformisation.pdf

[12] Henri Paul de Saint-Gervais. Uniformisation des surfaces de Riemann. Edit. ENS de Lyon, 2011.