Листок 1. Г- и B-функции

Анализ, 2 курс, **1.09.2014**

1◇1 Вычислите интегралы, указав, при каких значениях параметров они существуют: **а)** $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^3}\,dx$; **б)** $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$; **в)** $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(a+bx^\beta)^\gamma}\,dx$ $(a,b,\beta>0)$; **г)** $\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x\,dx$; **д)** $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x\,dx$; **е)** $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin(\pi x)\,dx$.

1◇2 **а)** Докажите, что $\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-xy}\,dy$ при $x>0$, $s>0$.

б) Докажите, что $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^\alpha}\,dx = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}$ при $0<\alpha<1$, $a>0$.

в) Докажите, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\beta}\,dx = \frac{\pi b^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\sin(\pi\beta/2)}$ при $0<\beta<2$, $b>0$.

Указание: для решения (б) и (в) пригодится (а).

г) Вычислите *интегралы Френеля* $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ и $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

1◇3 **а)** Докажите, что $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ $(n\to\infty)$, где γ — некоторая константа (называемая *постоянной Эйлера*).

Указание: перенесите $\ln n$ в левую часть, обозначьте новую левую часть через a_n и докажите сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty (a_{n+1}-a_n)$.

б) Докажите, что $1/2<\gamma<1$.

в) Докажите, что $\gamma < -\Gamma'(1)$.

г) Докажите, что $\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{k=1}^\infty \frac{e^{x/k}}{1+\frac{x}{k}}$ для всех $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$.

1◇4 **а)** Докажите, что $(\ln\Gamma(x))'' = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(x+k)^2}$ для всех $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$.

б) Вычислите $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

1◇5 Докажите, что $\Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}dt$ для всех $x>1$ (где $\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}$ — дзета-функция Римана).

1◇6 Найдите длину эллипса $2x^2+y^2=1$ (точнее, выразите ее через значения B-функции в некоторых точках).

1◇7 Г-функция является решением простейшего разностного уравнения $y(x+1) = xy(x)$. Найдите все решения следующих разностных уравнений:

а) $y(x+1) = ay(x)$, $a\in\mathbb{R}$ при всех $x>0$;

б) $y(x+1) = P(x)y(x)$, где $P(x)$ — многочлен, имеющий различные вещественные корни, а x — любое вещественное число, превосходящее максимальный корень $P(x)$;

в) $y(x+1) = a^{x^2+1}y(x)$, $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ при всех $x>0$.