Листок 1: кольца и модули, повторение

Задачи по коммутативной алгебре - матфак ВШЭ

надо сдать до 19.09.2014 включительно

Предполагается, что студенты знакомы с определениями кольца и модуля над кольцом. Все кольца будут ассоциативными, коммутативными, с единицей. Напомним, что идеал I в кольце A - это подмодуль A как модуля над собой, то есть подгруппа A по сложению, стабильная относительно умножения на все элементы кольца. Фактормодуль A/I тогда обладает структурой кольца (т.е. умножение по правилу $(a+I)(b+I) = ab+I$ корректно определено) и называется факторкольцом A по идеалу I. Идеал, порожденный элементами $a_1, \ldots, a_k$, обозначается $(a_1, \ldots, a_k)$. Идеал, не совпадающий со всем кольцом, называется простым, если из $xy \in I$ следует $x \in I$ или $y \in I$, и максимальным, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале. Область главных идеалов - это целостное кольцо, где любой идеал порожден одним элементом.

Сумма идеалов - это идеал, который они порождают. Произведение идеалов - это идеал, порожденный произведениями их элементов, по одному из каждого идеала-сомножителя.

1 Докажите, что A – поле, если и только если в A нет идеалов, кроме (0) и (1).

2 Пусть идеал I прост (соответственно, максимален). Что можно сказать о факторкольце A/I? Докажите, что максимальный идеал прост.

3 Докажите существование максимальных идеалов, а также то, что любой идеал содержится в максимальном (указание: используйте лемму Цорна).

4 Кольцо называется локальным, если оно имеет единственный максимальный идеал. Приведите примеры локальных колец (не являющихся полями). Докажите, что в локальном кольце нет идемпотентов (т.е. таких x, что $x^2 = x$), кроме 0 и 1.

5 Докажите, что в области главных идеалов следующие условия эквивалентны для ненулевого идеала I: (1) I прост; (2) I максимален; (3) I порождается неприводимым элементом.

6 Опишите простые идеалы в $\mathbf{Z}[X]$ (удобно вначале посмотреть на пересечение такого идеала с $\mathbf{Z}$).

7 Идеалы I и J называются взаимно простыми, если $I + J = A$. Докажите, что если $I_1, \dots, I_k$ попарно взаимно просты, то $I_1 I_2 \dots I_k = \cap_{1 \le l \le k} I_l$. Проверьте, что если I взаимно прост с J и с K, то I взаимно прост и с JK.

8 Китайская теорема об остатках: пусть A кольцо, $I_1, \dots, I_k$ идеалы, $p : A \to A/I_1 \times \dots \times A/I_k$, $p : a \mapsto (a + I_1, \dots, a + I_k)$. Докажите, что p сюръективно в том и только в том случае, когда $I_1, \dots, I_k$ попарно взаимно просты.

Напомним, что короткая точная последовательность - это диаграмма вида $0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$, где ядро каждой стрелки есть образ предыдущей стрелки, то есть $Ker(v) = Im(u)$, u инъекция, а v сюръекция; иначе говоря, M'' есть фактор M по M'.

9 Расщепление короткой точной последовательности модулей: пусть $0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ – короткая точная последовательность A-модулей. Показать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) существует такой гомоморфизм $r : M \to M'$, что $ru = id_{M'}$

б) существует такой гомоморфизм $s : M'' \to M$, что $vs = id_{M''}$

в) существует такой изоморфизм $\phi : M \to M' \oplus M''$, что $\phi(u(m')) = (m', 0)$ для $m' \in M'$ и $v = pr_{M''} \cdot \phi$, где $pr_{M''}$ – проекция на M''.

10 Докажите, что в короткой точной последовательности, в обозначениях предыдущего упражнения: если M конечно порожденный A-модуль, то и M'' тоже; если M' и M'' конечно порождены, то и M тоже. Верно ли, что если M конечно порожден, то и M' тоже? Покажите, что это верно при условии, что M'' свободен (т.е. изоморфен A^n).

11 Алгебра над A называется конечной, если она конечно порождена как A-модуль. Докажите, что конечная алгебра без делителей нуля над полем сама является полем. Выведите отсюда, что любой простой идеал в конечной алгебре над полем максимален.