

1. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА (МАГИСТЕРСКИЙ КУРС). Листок 1.
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ I.

Обязательные задачи: 1а, 2, 3а,б; 4 или 5а, 6,7. Срок сдачи - 2 октября.

1. а) Пусть δ – положительное число. Покажите, что $\operatorname{sh} z \sim e^z/2$ при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| < \pi/2 - \delta$, и что это не так в секторе $|\arg z| < \pi/2$.
б) Покажите, что $e^{-\operatorname{sh} z} = o(1)$ при $z \rightarrow \infty$ в полуполосе $\operatorname{Re} z \geq 0, |\operatorname{Im} z| \leq \pi/2 - \delta$.
2. Покажите, что множество функций $\{z^{-m}, z^{-n} \log z, z^{-p} \log^2 z\}, m, n, p = 0, 1, 2, \dots,$ можно упорядочить в асимптотическую последовательность при $z \rightarrow \infty, |\arg z| < \pi$. Предъявите соответствующее асимптотическое разложение для $\log^2(1+z)$. Сходится ли оно?
3. а) Покажите, что функция e^z не допускает степенного асимптотического разложения при $z \rightarrow \infty$;
б) укажите возможно больший сектор $\alpha < \arg z < \beta$, в котором функция e^z имеет нулевое степенное асимптотическое разложение при $z \rightarrow \infty$;
в)* покажите, что если однозначная голоморфная в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ функция допускает в ней асимптотическое разложение, $f(z) \sim \sum_{k=N}^{+\infty} a_k z^{-k}, z \rightarrow \infty$, то ∞ не есть существенно особая точка функции и, более того, для достаточно больших z ряд $\sum_{k=N}^{+\infty} a_k z^{-k}$ сходится к $f(z)$.
4. Найдите асимптотику n -го положительного корня уравнения

а) $x = \operatorname{ctg} x$

б) $\sin x = e^{-x}$

В каждом уравнении предложите асимптотическую последовательность из элементарных функций аргумента n , для которой возможно рекуррентное нахождение коэффициентов асимптотического разложения корня. Найдите 3 первых члена разложения.

5. а) Исследуйте асимптотику при $\lambda \rightarrow +\infty$ корня уравнения $x^2 = \lambda + \log x$.
б)* Найдите полное асимптотическое разложение по $\lambda \rightarrow +\infty$ положительного корня кубического уравнения $x^3 - 3x = \lambda^3$. Сходится ли оно?
6. Найдите асимптотику интегралов при больших положительных x . Сходятся ли соответствующие асимптотические разложения? Предложите какую-либо оценку остаточного члена.

а) $\int_x^{+\infty} \frac{e^{int}}{t^a} dt, a > 1, n \in \mathbb{N}$

б) $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$

7. Интегрируя по частям, найдите асимптотическое разложение при $z \rightarrow \infty, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta$ интегралов

а) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2 + z^2} dt,$

б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + z^2} dt$

8. Покажите, что $\int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{sh} t} dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{z^{2k+1}}$ при $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$.

9. а)* Покажите, что задача Коши $L_\varepsilon(x(t, \varepsilon)) = 0, x(0, \varepsilon) = 1$, где $L_\varepsilon(x(t, \varepsilon)) = \varepsilon \frac{dx}{dt} - (t + 1) + x^2$ допускает при $\varepsilon \rightarrow +0$ асимптотическое решение (*т.е., применение оператора L к N -му приближению есть $O(\varepsilon^N)$)*) вида $x = \sqrt{t+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t)$. Найдите первый нетривиальный член $x_1(t)$ этой асимптотики.
б)** Покажите, что задача Коши $L_\varepsilon(x(t, \varepsilon)) = 0, x(0, \varepsilon) = 0$ с тем же оператором L также допускает асимптотическое решение, которое может быть представлено в виде суммы предыдущего решения $x(t, \varepsilon)$ и асимптотического ряда $y(t) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k y_k(\tau)$, где $t = \varepsilon \tau$. Найдите первый член $y_0(\tau)$ этого разложения.