# 1 Вводная лекция

## 1.1 Теория Струн

- В широком смысле - “основа современной матфизики”: некоторый единый подход к теории элементарных частиц, гравитации и задачам статистической физики.

- В узком смысле - релятивистские струны являются простейшим обобщением релятивистских частиц. Теории на “мировых листах” размерности $p = 1, 2, 3, \ldots$ называются соответственно частицами, струнами, мембранами - в общем случае $(p+1)$-бранами. Нетривиально, что существуют даже браны с $p + 1 = 0$ - инстантоны.

## 1.2 Релятивистская частица

Обозначения: $s^2 = -(x_1 - x_0)^\mu (x_1 - x_0)_\mu$, $\{x^\mu\} = (ct, \mathbf{x})$, $x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$; $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ (этот выбор будет меняться!).

Действие свободной частицы - релятивистский инвариант

$$S[X] = \kappa \int ds = \kappa \int \sqrt{-dX^\mu dX_\mu} = \kappa c \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{X}}^2} \tag{1.1}$$

Забудем про время - длина дуги в пространстве: $dl = \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right| d\tau$, $L = \int dl = \int d\tau \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right)}$. Дальше - добавили время и изменили знак под корнем, так как для времениподобного интервала $dx^\mu dx_\mu < 0$ (по повторяющимся индексам подразумеваем суммирование!). В нерелятивистском пределе[1]

$$\begin{aligned} S[X] \underset{c\to\infty}{\to} \kappa c \int dt \left(1 - \frac{1}{2c^2}\dot{\mathbf{X}}^2 + \ldots\right) &\stackrel{?}{=} \\ \stackrel{?}{=} \mathrm{const} + \int dt \frac{m}{2}\dot{\mathbf{X}}^2 + O(1/c) \end{aligned} \tag{1.2}$$

т.е. $\kappa = -mc$. А релятивистское свободное действие - не квадратично?

[1] Наименьшее действие $S \sim \langle V^2 \rangle \geq \langle V \rangle^2$.

Введем произвольный параметр на траектории:

$$S[X] = -mc\int\sqrt{-dX^\mu dX_\mu} = -mc\int d\tau\sqrt{-\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu} \tag{1.3}$$

где теперь $\dot{X}^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau}$, а $\tau$ - вовсе не обязательно $t$. (В книге ЛЛ пользуются $\tau = s$, $\frac{dX^\mu}{d\tau}$ - 4-скорость). Уравнения движения

$$\begin{gathered}\delta S[X] = mc\int d\tau\frac{\dot{X}_\mu\delta\dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu}} = \\ = mc\frac{\dot{X}_\mu\delta X^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu}}\Bigg| - \int d\tau\delta X^\mu\frac{d}{d\tau}\frac{mc\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu}}\end{gathered} \tag{1.4}$$

т.е.

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0, \qquad p_\mu = \frac{\partial S}{\partial X^\mu} = -\frac{mc\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu}} \tag{1.5}$$

Действие (1.3) вообще от выбора $\tau$ не зависит, т.е. инвариантно относительно любых замен

$$\tau \to \tau' = f(\tau), \qquad f(\tau_0) = \tau_0, \quad f(\tau_1) = \tau_1 \tag{1.6}$$

“длина” не зависит от выбора параметризации кривой. Как записать эту симметрию локально? Этот простой ответ

$$\delta X^\mu = \dot{\xi}X^\mu, \qquad \delta e = \frac{d}{d\tau}(\xi e) \tag{1.7}$$

с локальным параметром $\xi = \xi(\tau) = \tau - f(\tau)$ требуется получить самостоятельно.

Это действие легко переписать в квадратичном виде

$$S[X] \to S[X,e] = \tfrac{1}{2}\int d\tau\frac{\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \tfrac{1}{2}m^2c^2\int e(\tau)d\tau \tag{1.8}$$

не теряя инвариантности, если $e(\tau)d\tau = e(\tau')d\tau'$. Действительно

$$\frac{\delta S}{\delta e} = -\frac{\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu}{e^2} - m^2c^2 = 0 \tag{1.9}$$

дает $e = \frac{1}{mc}\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}$, и после подстановки назад в действие

$$
\begin{aligned}
S[X,e] \to \tfrac{1}{2}\int d\tau \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \tfrac{1}{2}m^2c^2 \int e(\tau) d\tau = \\
= -mc \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

получаем старый результат. Но: действие (1.8) - квадратично по $X$-м и не содержит производных от $e(\tau)$, т.е. у $e(\tau)$ “нет динамики”, и его можно выбрать в любом виде, например $e(\tau) = \mathrm{const}$, “одномерная геометрия” - почти тривиальна. Динамика (по вспомогательному параметру $\tau$, который вынужден играть роль времени) переменных $\{X^\mu(\tau)\}$

$$
\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{X}^\mu}{e} = 0 \tag{1.11}
$$

при этом линейна. Кроме того, для $S[X,e]$ существует нетривиальный предел $m \to 0$ - безмассовая частица, движущаяся со скоростью света.

## 1.3 Частица во внешних полях

Взаимодействие

$$
\begin{aligned}
S \to S_0 + \frac{1}{c}\int A_\mu(X) dX^\mu = S + \frac{1}{c}\int A_\mu(X)\dot{X}^\mu d\tau = \\
\underset{\tau=t}{=} S + \int dt \left(\frac{1}{c}\mathbf{A}(\mathbf{X},t)\dot{\mathbf{X}} - \varphi(\mathbf{X},t)\right)
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

естественный линейный по производным член. Электромагнитное взаимодействие с векторным и скалярным потенциалами. Сила взаимодействия

$$
\begin{aligned}
\delta \int A_\mu(X)\dot{X}^\mu d\tau = \int \left(\partial_\nu A_\mu \delta X^\nu \dot{X}^\mu + A_\mu \delta \dot{X}^\mu\right) \simeq \\
\simeq \int \left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right) \delta X^\nu \dot{X}^\mu
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

т.е. $\frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu}\dot{X}^\nu$, где $p_\mu = \frac{\delta S_0}{\delta X^\mu}$, а

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

при стандартных выражениях $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

## 1.4 Евклидово действие

Продолжение $\tau \to -i\tau_E$, $\eta_{\mu\nu} \to \delta_{\mu\nu}$, $iS \to -S$. Тогда

$$S[X] = \tfrac{1}{2}\int d\tau \frac{\dot{X}_\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} + \tfrac{1}{2}m^2 \int e(\tau) d\tau \tag{1.15}$$

где все положительно и верхние индексы не отличаются от нижних.

## 1.5 Фермионы и грассмановы переменные

Антикоммутирующие "числа" (элементы $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры Грассмана)

$$\Psi^\mu \Psi^\nu + \Psi^\nu \Psi^\mu = 0 \tag{1.16}$$

что бы это ни значило. Если $\mu, \nu = 1, \ldots, D$, то размерность грассмановой алгебры как линейного пространства $2^D$.

В частности для единственной переменной $\Psi^2 = 0$, и любая функция является линейной

$$f(\Psi) = \phi + \chi\Psi = \phi - \Psi\chi \tag{1.17}$$

где, если это отображение в числа (точнее в четные элементы алгебры Грассмана), то $\phi$ - коэффициент четный, а $\chi$ - нечетный, т.е. антикоммутирующий с $\Psi$.

Можно определить и функции со значениями в алгебре Грассмана, например на отрезке $t \mapsto \Psi(t)$. При этом будем считать их значения в разные моменты времени вообще говоря *разными* элементами алгебры, т.е.

$$\Psi(t)\Psi(t') + \Psi(t')\Psi(t) = 0 \tag{1.18}$$

Точно также можно определить формальную производную по параметру $\dot{\Psi} = \frac{d}{dt}\Psi$. Тогда

$$\dot{\Psi(t)}\Psi(t) + \Psi(t)\dot{\Psi}(t) = 0 \tag{1.19}$$

и забавно проверить непротиворечивость правила Лейбница при дифференцировании $\Psi(t)^2 = 0$.

## 1.6 Суперсимметрия и фермионы

Соотвтетствующее действие на мировой линии можно определить, потребовав инвариантности относительно преобразований суперсимметрии (одномерной супергравитации!) - в евклидовой формулировке

$$\begin{aligned}
\delta X^\mu &= \epsilon\Psi^\mu \\
\delta\Psi^\mu &= -\epsilon\left(\dot{X}^\mu + \tfrac{1}{2}\chi\Psi^\mu\right)e^{-1} \\
\delta\chi &= -2\dot{\epsilon} \\
\delta e &= -\epsilon\chi
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Откуда это все берется? Начнем с упрощенного варианта, когда $e(t) = const(= T)$, т.е. преобразования

$$\begin{aligned}
\delta X^\mu &= \epsilon\Psi^\mu \\
\delta\Psi^\mu &= -e^{-1}\epsilon\dot{X}^\mu
\end{aligned} \tag{1.21}$$

а действие ... квадратично

$$S[X,\Psi] = \tfrac{1}{2}\int d\tau\left(\frac{\dot{X}_\mu\dot{X}_\mu}{e} + \Psi_\mu\dot{\Psi}_\mu\right) \tag{1.22}$$

тогда, очевидно

$$\delta S[X,\Psi] = \int d\tau\left(\frac{\dot{X}_\mu\delta\dot{X}_\mu}{e} + \tfrac{1}{2}\Psi_\mu\delta\dot{\Psi}_\mu + \tfrac{1}{2}\delta\Psi_\mu\dot{\Psi}_\mu\right) \tag{1.23}$$

где постоянную метрику $e$ пока не варьируем. Существенно, что после интегрирования по частям второй член удваивает коэффициент у третьего (а не сокращает его), и таким образом

$$\begin{aligned}\delta S[X,\Psi] &= \int d\tau \left(\frac{\dot{X}^\mu \delta \dot{X}_\mu}{e} + \delta\Psi_\mu \dot{\Psi}^\mu\right) = \\ &= \int d\tau \left(\frac{\dot{X}_\mu}{e}(\epsilon\dot{\Psi}^\mu + \dot{\epsilon}\Psi^\mu) + \delta\Psi_\mu\dot{\Psi}^\mu\right)\end{aligned} \tag{1.24}$$

куда мы подставили уже формулу суперсимметричного преобразования координаты из (1.21) и продифференцировали ее.

При постоянном $\dot{\epsilon} = 0$ очевидно, что формула преобразования $\Psi$ из (1.21) приводит к тому, что действие остается инвариантным. Но при зависящем от параметра на траектории $\epsilon$ (локальные преобразования) кусок $\frac{\dot{X}_\mu \Psi^\mu}{e}\dot{\epsilon}$ остается. Член, пропорциональный производной от параметра преобразования содержит "суперток", который сохраняется на уравнениях движения

$$Q = \frac{\dot{X}_\mu \Psi^\mu}{e}, \qquad \dot{Q} = 0 \tag{1.25}$$

Чтобы сократить этот вклад к действию добавляется член $\frac{\chi}{e}\Psi\dot{X}$ с новым грассмановым полем $\chi$, и законом преобразования $\delta\chi = -2\dot{\epsilon}$. Таким образом, полное суперсимметричное действие имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau \left(\frac{\dot{X}^2}{e} + \Psi\dot{\Psi} + \frac{\chi}{e}\Psi\dot{X}\right) \tag{1.26}$$

Наконец, рассмотрим член взаимодействия фермионной частицы с электромагнитным полем, который имеет вид

$$S_A = \int d\tau \left(\dot{X}^\mu A_\mu(X) + \frac{e}{2}F_{\mu\nu}(X)\Psi^\mu\Psi^\nu\right) \tag{1.27}$$

опять же полностью фиксируемый преобразованиями суперсимметрии. Действительно, вариацию

$$\delta\int d\tau \dot{X}^\mu A_\mu(X) = \int d\tau \epsilon F_{\nu\mu}(X)\dot{X}^\mu \delta X^\nu = \int d\tau \epsilon F_{\nu\mu}(X)\dot{X}^\mu\Psi^\nu \tag{1.28}$$

как раз можно сократить варьированием второго члена в (1.27)

$$\begin{gathered}\delta \int d\tau \frac{e}{2} F_{\mu\nu}(X)\Psi^\mu\Psi^\nu = \\ = \int d\tau \left( \frac{e}{2}\partial_\lambda F_{\mu\nu}\Psi^\mu\Psi^\nu\delta X^\lambda + \frac{\delta e}{2} F_{\mu\nu}\Psi^\mu\Psi^\nu + eF_{\mu\nu}\Psi^\mu\delta\Psi^\nu \right)\end{gathered} \tag{1.29}$$

в котором:

- первое слагаемое вообще не дает вклада так как

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu}(X)\Psi^\mu\Psi^\nu\delta X^\lambda = \epsilon\partial_\lambda F_{\mu\nu}(X)\Psi^\mu\Psi^\nu\Psi^\lambda = 0 \tag{1.30}$$

  в силу тождеств Бианки;

- последнний член

$$eF_{\mu\nu}\Psi^\mu\delta\Psi^\nu = -F_{\mu\nu}\Psi^\mu\epsilon\dot{X}^\nu - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\Psi^\mu\epsilon\chi\Psi^\nu \tag{1.31}$$

  дает два куска, из которых первый сокращается с (1.28), а второй обеспечивает сокращение среднего члена как раз при $\delta e = \epsilon\chi$.

Почему фермионы? На этот вопрос может ответить только квантовая теория.