Прикладные методы анализа. Листок 2. Функции Грина

Решение задач 2 (все пункты), 3,4,5а), 7 (все пункты) входит в необходимые условия получения зачета и допуска к экзамену. Срок сдачи - 16 октября.

1. Докажите, что в точках разрыва оригинала с показателем роста $s < a$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$$

2. а) Решите задачи 5а и 5б листка 1, пользуясь формулой Дюамеля: $pF(p)G(p) \div f'(t) * g(t) + f(0)g(t)$.

   б) Напишите решение задачи Коши $x'' + x = e^{-t^2}$, $x(0) = x'(0) = 0$ в виде интеграла.

3. При подключении к электрической цепи (с отсутствующим начальным током и зарядами конденсаторов) источника постоянной э.д.с. напряжением в 2 вольта в ней на заданном участке цепи возник ток вида $i(t) = \cos 2t - 1$ ампер. Какова будет временная зависимость тока на этом же участке при подключении э.д.с. вида $u(t) = \sin t$ вольт?

Пусть L – линейный дифференциальный оператор. Функция $G(x, y)$ двух переменных называется **функцией Грина** задачи $L(u(x)) = g(x)$ с нулевыми граничными значениями на (возможно бесконечном) интервале $x \in [a, b]$, где $a < b$, если ее решение при $x \in [a, b]$ может быть представлено в виде $u(x) = \int_a^b G(x, y)g(y)dy$. Если интервал, или граничные условия не фиксируются, а формула $u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y)g(y)dy$ определяет некоторое решение неоднородного уравнения $L(u(x)) = g(x)$, то ядро $G(x, y)$ также называют функцией Грина оператора L, либо **фундаментальным решением** оператора L (или уравнения $L(u(x)) = \delta(x - y)$). Общее решение неоднородного уравнения имеет вид $u(x) = u_0(x) + \int_a^b G(x, y)g(y)dy$, где $u_0(x)$ – решение однородной задачи $L(u_0(x)) = 0$.

4. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ - линейно-независимые решения однородного линейного дифференциального уравнения $u''(x)+a(x)u'(x)+b(x)u(x) = 0$. Покажите (например, методом вариации постоянной), что функция Грина $G(x, y)$ задачи Коши $u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x)$, $u(0) = 0, u'(0) = 0$ равна нулю при $x < y$, и имеет вид

$$G(x, y) = \frac{u_1(x)u_2(y) - u_1(y)u_2(x)}{u_1(y)u_2'(y) - u_1'(y)u_2(y)} \qquad \text{при } x > y.$$

5. Пусть $L = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0$ – линейный дифференциальный оператор n-го порядка с постоянными коэффициентами. Покажите, что функция Грина задачи Коши $L(u(x)) = g(x)$, $u(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$ равна нулю при $x < y$, а при $x > y$ может быть представлена в виде

   а) $G(x, y) = u_1'(x - y)$, где $u_1(x)$ – решение задачи Коши $L(u(x)) = 1$, $u(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$;

   б) $G(x, y) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{p(x-y)}}{2\pi i L(p)}dp$, где a – достаточно большое вещественное число, $L(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0$.

6. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – линейно-независимые решения дифференциального уравнения $u''(x) + b(x)u(x) = 0$, удовлетворяющие условиям $u_1(0) = 0$, $u_2(1) = 0$. Покажите, что функция Грина однородной краевой задачи $u''(x) + b(x)u(x) = f(x)$, $u(0) = u(1) = 0$ пропорциональна функции

$$\widetilde{G}(x, y) = \begin{cases} u_1(x)u_2(y), & x < y, \\ u_1(y)u_2(x), & x > y \end{cases}.$$

Найдите коэффициент пропорциональности.

7. Найти функцию Грина следующих краевых задач для уравнения колебаний струны $u'' + k^2u = f(x)$, $x \in [0, \pi]$, $k > 0$:

   а) $u(0) = u(\pi) = 0$; б) $u'(0) = u'(\pi) = 0$.

При каких k эти задачи разрешимы?

8. Найти функцию Грина уравнения $u'' - k^2 u = f(x)$ с граничными условиями ($k > 0$):

а) $u(0) = 0$, функция $u(x)$ ограничена при $x \to +\infty$ на полуоси $x \geq 0$;

б) $u(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

9. * Пусть дана непрерывная функция $f(x)$, убывающая при $x \to +\infty$ быстрее, чем $1/x^2$. Найдите решение уравнения

$$\psi'' + k^2 \psi = f(x), \qquad k > 0,$$

со следующим граничным условием: существует $\lim_{x \to +\infty} e^{-ikx} \psi(x) = 1$.

10. При каких условиях на a, b и $f(x)$ разрешима краевая задача $u'' = f(x)$, $u'(0) = a$, $u'(1) = b$? Выпишите ее общее решение в случае существования.