Листок 2. Дифференцируемые отображения

Анализ, 2 курс, **22.09.2014**

2◇1 **а)** Напишите уравнение касательной плоскости к графику дифференцируемой функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, в точке (x_0, y_0). **б)** Напишите уравнение касательной к линии уровня $F(x,y) = F(x_0,y_0)$ функции $F(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ в точке (x_0,y_0), если $\operatorname{grad} F(x_0,y_0) \neq 0$ и покажите, что градиент функции F ортогонален касательной.

2◇2 Считается, что дом можно строить, если угол наклона почвы не превышает 30 градусов, иначе он сползает. Опишите область, где можно строить дом **а)** на горе, описываемой графиком функции $f(x,y) = -x^2 - y^2$; **б)** на перевале, описываемом графиком функции $f(x,y) = x^2 - y^2$.

2◇3 Выясните, в каких точках дифференцируемы следующие функции: **а)** $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$; **б)** $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, где у них существуют частные производные, и где эти частные производные непрерывны?

2◇4 Придумайте функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, имеющую в точке $x_0 \in \mathbb{R}^2$ производную вдоль любого вектора, но **а)** разрывную в x_0; **б)** непрерывную в x_0, но не дифференцируемую в x_0; **в)** непрерывную в $\mathbb{R}^2$, дифференцируемую в $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$, но не дифференцируемую в x_0.

2◇5 Докажите, что функция $f(x,y)$, имеющая ограниченные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой выпуклой области G, равномерно непрерывна в этой области.

2◇6 Докажите, что, если функция $f(x,y)$ в некоторой области G непрерывна по x при каждом фиксированном y и имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial u}{\partial y}$, то эта функция непрерывна в области G.

2◇7 Пусть $f(x,y)$ – непрерывно дифференцируемая функция в некоторой области G и $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ в области G. Верно ли утверждение, что функция $f(x,y)$ не зависит от y в области G?

2◇8 Пусть f – гладкая функция на $\mathbb{R}^2$, и пусть ее ограничение на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет максимум в этой точке. Верно ли, что $(0,0)$ – точка максимума функции f?

2◇9 Найдите все решения уравнений:
а) $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$;
б) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$,
градиенты которых нигде не обращаются в ноль.

2◇10 Докажите, что уравнение $x = x^3 + 0.001$ имеет корень вблизи нуля, и найдите его первые 10 знаков.

2◇11 Приведите пример отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ без неподвижных точек, такого, что $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ для любых $x \neq y$.

2◇12 Докажите, что, если какая-то итерация $f^{\circ n}$ отображения f полного пространства X в себя является сжимающей, то f имеет неподвижную точку. Может ли при этих условиях отображение f иметь несколько неподвижных точек?

2◇13 Пусть $x \longmapsto y(x)$ неявная функция, определяемая уравнением

$$x = y + \varphi(y),$$

где $y \longmapsto \varphi(y)$ — дифференцируемая периодическая функция с периодом ω и такая, что $|\varphi'(y)| < 1$. Докажите, что $y = x + \psi(x)$, где $\psi(x)$ – периодическая функция с периодом ω.

2◇14 Пусть $1 < \lambda < 3$ и $f(x) = \lambda x(1-x)$. Докажите, что для всякой точки $x \in (0,1)$ последовательность $f^{\circ n}(x)$ сходится к неподвижной точке отображения f.