Задачи по группам и алгебрам Ли – 1.
Дифференцирования и дифференциальные операторы.

Зачет по данному листку ставится в случае сдачи 80% пунктов задач. Дедлайн 26 сентября.

Пусть A – алгебра (не обязательно коммутативная и даже не обязательно ассоциативная). *Дифференцированием* алгебры A называется линейный оператор $D : A \to A$, удовлетворяющий *тождеству Лейбница*: для любых $a, b \in A$ выполнено $D(ab) = D(a)b + aD(b)$.

1. Пусть D_1, D_2 – дифференцирования алгебры A. Докажите, что коммутатор $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ есть снова дифференцирование. Таким образом, все дифференцирования алгебры A образуют (неассоциативную) алгебру $\operatorname{Der} A$ относительно операции коммутатора.

2. а) Пусть A – ассоциативная алгебра, и $a \in A$ – произвольный ее элемент. Докажите, что оператор $\operatorname{ad} a : A \to A$, действующий как $\operatorname{ad} a : b \mapsto ab - ba$, является дифференцированием алгебры A. Такие дифференцирования называются *внутренними.* **б)** Пусть A – произвольная алгебра. Докажите, что для всякого $D \in \operatorname{Der} A$ оператор $\operatorname{ad} D : \operatorname{Der} A \to \operatorname{Der} A$, действующий как $\operatorname{ad} D : D_0 \mapsto [D, D_0]$, является дифференцированием алгебры $\operatorname{Der} A$. **в)** Докажите, что утверждение пункта б) эквивалентно следующему тождеству:

$$[[D_1, D_2], D_3] + [[D_2, D_3], D_1] + [[D_3, D_1], D_2] = 0$$

для любых $D_1, D_2, D_3 \in \operatorname{Der} A$. Это тождество называется *тождеством Якоби.*

Алгеброй Ли называется векторное пространство L с билинейной операцией $[\cdot, \cdot] : L \times L \to L$, удовлетворяющей следующим двум условиям:

(1) кососимметричность: $[x, y] = -[y, x]\ \forall x, y \in L$.
(2) тождество Якоби: $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0\ \forall x, y, z \in L$.

3. а) Пусть A – ассоциативная алгебра. Докажите, что пространство A является алгеброй Ли относительно операции коммутатора $[a, b] := ab - ba$. Эта алгебра Ли обычно обозначается A^-. **б)** Докажите, что дифференцирования любой алгебры образуют алгебру Ли относительно коммутатора.

4. а) Докажите, что все дифференцирования алгебры полиномов $\mathbb{C}[z]$ имеют вид $D : F(z) \mapsto f(z)\frac{\partial F(z)}{\partial z}$, где $f(z) \in \mathbb{C}[z]$. (*Указание:* выясните, куда может переводить дифференцирование элементы 1 и z). **б)** Укажите какой-нибудь базис в алгебре Ли $\operatorname{Der} \mathbb{C}[z]$ и выпишите операцию коммутатора в этом базисе. **в)** Те же вопросы для алгебры полиномов Лорана $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$.

5. Опишите все дифференцирования алгебры **а)** полиномов; **б)** полиномов Лорана; **в)** рациональных функций от n переменных $z_1, \ldots, z_n$.

6. Пусть A – произвольная алгебра, а $\varphi_t : A \to A$ – семейство автоморфизмов алгебры A, зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$ дифференцируемым образом (т.е. матричные элементы этого автоморфизма в каком-либо базисе алгебры A являются гладкими фукциями переменной t), такое что $\varphi_0 = \operatorname{Id} : A \to A$. **а)** Докажите, что оператор $D : A \to A$ действующий как $D : a \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t(a)$ есть дифференцирование алгебры A. **б)** Пусть D_0 – еще одно дифференцирование алгебры A. Докажите, что $[D, D_0] = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t D_0 \varphi_t^{-1}$. **в)** Пусть $\varphi_t : A \to A$, $\psi_t : A \to A$ – два таких семейства автоморфизмов, а D_1, D_2 – соответствующие дифференцирования. Докажите, что

$$[D_1, D_2](a) = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}|_{t,s=0}\varphi_t\psi_s\varphi_t^{-1}\psi_s^{-1}(a)$$

7. а) Пусть A – конечномерная алгебра, а $D : A \to A$ – какое-нибудь ее дифференцирование. Докажите, что $\exp D$ – автоморфизм алгебры A. **б)** Докажите, что дифференцирование D есть производная семейства автоморфизмов $\varphi_t = \exp tD$.

8. Постройте семейства автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}[z]$, такие что соответствующее дифференцирование есть **а)** $\frac{\partial}{\partial z}$; **б)** $z\frac{\partial}{\partial z}$.

Пусть A – коммутативная ассоциативная алгебра с единицей, n – неотрицательное целое число. *Дифференциальным оператором* порядка не выше n на алгебре A называется линейный оператор $D : A \to A$, такой, что для любого $a \in A$ оператор $D \circ a - a \circ D$ есть дифференциальный оператор порядка не выше $n-1$. Дифференциальный оператор порядка -1 по определению равен нулю.

9. а) Докажите, что дифференциальные операторы порядка 0 на алгебре A – это в точности операторы умножения на элементы алгебры A. **б)** Докажите, что дифференциальные операторы порядка не выше 1 на алгебре A – это операторы вида $l + a$, где l – дифференцирование, а a – оператор умножения на элемент алгебры A.

10. а) Пусть D_1, D_2 – дифференциальные операторы порядков n_1, n_2 соответственно. Докажите, что оператор $D_1 \circ D_2$ есть дифференциальный оператор порядка не выше $n_1 + n_2$. **б)** Докажите, что дифференциальный оператор $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ имеет порядок не выше $n_1 + n_2 - 1$.

11. Опишите все дифференциальные операторы на алгебре многочленов **а)** одной переменной; **б)** многих переменных.