Пучки и гомологическая алгебра

С.М.Натанзон

Содержание

1. Введение. 1
2. Пучки. 2
2.1. Основные определения. 2
2.2. Накрытия. 3
3. Когомологии с коэффициентами в пучке. 5
3.1. Каноническая резольвента пучка. 5
3.2. Когомологии. 6
4. Точные последовательности. 8
4.1. Мягкие пучки. 8
4.2. Длинная точная последовательность. 10

1. Введение.

Хорошо известно, что непостоянная функция, голоморфная на комплексной плоскости, неограничена. Другими словами, в некоторых случаях по локальным свойствам функций (например голоморфность) можно судить о ее глобальных свойствах. Взаимосвязь локальных и глобальных свойств позволяет исследовать явление в целом стартуя с его, локальных, обычно проще контролируемых, свойств.

Необходимый для этого математический аппарат был создан в середине прошлого века. Он основан на *теории пучков*. Свойства пучков автоматизируют свойства тензорных полей на многообразиях. Пучкам отвечают коммутативные группы, называемые *группами когомологий со значениями в пучке (или, что тоже самое, с коэффициентами в пучке)*, и специальные элементы групп когомологий многообразия со значениями в постоянном пучке, называемые *классами Черна*. Группы когомологий и классы Черна определяют важнейшие фундаментальные свойства многообразия. Эти понятия являются основным языком всех разделов современной геометрии. Настоящий курс является введением в теорию пучков и связанных с ней структур.

Первая часть курса посвящена когомологиям со значениями в пучках. Мы даем несколько по виду совершенно не похожих друг на друга конструкций когомологий: с помощью ацикличных резольвент, через семейства покрытий (когомологии Чеха) и, для гладких многообразий, с помощью дифференциальных форм (когомологии де Рама) и сингулярных коцепей (сингулярные когомологии). Мы доказываем что все эти конструкции приводят к одинаковым группам когомологий (теоремы Лере и де Рама). Более того, мы показываем, что когомологии реализуют единственный естественный функтор из категории пучков абелевых групп в категорию абелевых групп, переводящий короткую точную последовательность пучков в длинную точную последовательность групп.

Вторая часть курса посвящена самому "массовому"типу пучков: локально свободным пучкам, то есть пучкам сечений локально тривиальных векторных расслоений. Мы определяем и исследуем универсальное расслоение. Далее мы изучаем простейшие свойства пучков и расслоений на комплексных многообразиях, их когомологии Дольбо и числа Ходжа. В заключении мы подробно обсуждаем замечательные свойства голоморфных расслоения ранга 1 .

2. Пучки.

2.1. **Основные определения.** Напомним, что *топологическим пространством* называется множество X с системой подмножеств $\mathfrak{U} = \{U\}$, называемых *открытыми* такой, что

1) $X, \emptyset \in \mathfrak{U}$,

2) объединение $\bigcup U_\alpha$ произвольного числа $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$,

2) пересечение $\bigcap U_\alpha$ конечного числа $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$.

Дополнение $X - U$ к отрытому множеству $U \in \mathfrak{U}$ называется *замкнутым множеством.*

Предпучком $\mathcal{F}$ над топологическом пространством $(X, \mathfrak{U})$ называется

a) набор множеств $\{\mathcal{F}(U) | U \in \mathfrak{U}, U \neq \emptyset\}$, называемый *сечениями над* U,

b) набор отображений $\{r^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) | \ U, V \in \mathfrak{U}, V \subset U\}$, называемых *ограничениями*, такой, что

1)$r^U_U = 1_U$ — тождественное отображение;

2)$r^U_W = r^V_W r^U_V$ при $W \subset V \subset U$.

Предпучок $\mathcal{F}$ называется *предпучком групп (колец, модулей и т.п)*, если все множества $\mathcal{F}(U)$ являются группами (соответственно кольцами, модулями и т.п) и все отображения r^U_V являются гомоморфизмами соответствующих структур.

Пучком называется предпучок $\mathcal{F}$, в котором выполнены следующие аксиомы:

1) Пусть $U = \bigcup U_i$; $s, t \in \mathcal{F}(U)$ и $r^U_{U_i}(s) = r^U_{U_i}(t)$ для всех U_i. Тогда $s = t$.

2) Пусть $U = \bigcup U_i$; $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ для всех i и $r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ для всех i, j. Тогда существует $s \in \mathcal{F}(U)$ такое, что $r^U_{U_i}(s) = s_i$.

Пример 2.1. ***Пучок отображений топологического пространства** X **в множество** Y.* *Здесь $\mathcal{F}(U)$ — множество всех отображений открытого множества U в множество Y, а r^U_V — ограничение отображения на подмножество. Если все множество Y является группой (соответственно кольцом, модулем и т.п), то возникает пучок групп (соответственно колец, модулей и т.п).*

Пример 2.2. ***Постоянный пучок**. Если в предыдущем примере в качестве $\mathcal{F}(U)$ рассматривать лишь локально постоянные отображения, то возникает пучок, называемый постоянным. (Напомним: локально постоянное отображение — это отображение, постоянное в некоторой окрестности каждой точки.)*

Пример 2.3. ***Пучок непрерывных отображений**. Если в примере 2.1 считать, что Y — тоже топологическое пространство и $\mathcal{F}(U)$ — непрерывные отображения, то возникает пучок непрерывных отображений.*

Пример 2.4. ***Пучок гладких отображений***. *Если в примере 2.3 считать, что X и Y — гладкие многообразия и $\mathcal{F}(U)$ — гладкие отображения, то возникает пучок гладких отображений. Он называется пучком гладких функций, если $Y = \mathbb{R}$.*

Пример 2.5. ***Пучок голоморфных отображений***. *Если в примере 2.3 считать, что X и Y — комплексные многообразия и $\mathcal{F}(U)$ — голоморфные функции, то возникает пучок пучок голоморфных отображений. Он называется пучком голоморфных функций, если $Y = \mathbb{C}$. .*

Последние 2 пучка, несмотря на похожесть определений обладают принципиально разными свойствами.

Пример 2.6. ***Пучок тензорных полей***. *Если X — гладкое или комплексное многообразие и $\mathcal{F}(U)$ — тензорные поля на U, то возникает пучок тензорных полей.*

Упражнение 2.1. *Докажите, что конструкции, описанные в примерах, действительно порождают пучки.*

Упражнение 2.2. *Придумайте предпучок, не являющийся пучком.*

Говорят, что *предпучок $\mathcal{A}$ является подпредпучком пучка $\mathcal{B}$* (и пишут $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$), если $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{B}(U)$ для любого открытого множества U.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — предпучки на X. Их *морфизмом* $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется набор отображений $\{h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) | U \in \mathfrak{U}\}$ такой, что $h_V r_V^U = r_V^U h_U$. Морфизм называется *изоморфизмом*, если все отображения взаимно однозначны.

Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются предпучками групп, колец, модулей и т.п, то морфизмами таких предпучков считаются лишь морфизмы $\{h_U\}$, порождающие гомоморфизмы соответствующих структур.

Упражнение 2.3. *Докажите, что ядра и образы отображений h_U порождают подпредпучки $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathcal{F}$ и $\mathrm{Im}(h) \subset \mathcal{G}$.*

Морфизмы предпучков групп, колец, модулей и т.п называются *мономорфизмами, эпиморфизмами или изоморфизмами*, если такими являются все отображения $\{h_U\}$.

Упражнение 2.4. *Пусть множества $\mathcal{F}(U)$ из примера 2.6 состоят из гладких или голоморфных (когда X — комплексное многообразие) тензорных полей. Докажите, что тогда множества $\mathcal{F}(U)$ также образуют пучок, называемый пучком гладких (соответственно голоморфных) тензорных полей. Докажите, что этот пучок мономорфно отображается в пучок всех тензорных полей из примера 2.6.*

2.2. **Накрытия.** Сюръективный локальный гомеоморфизм топологических пространств $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ назовем *накрытием* (это определение отличается от стандартного, но удобно для изучения пучков).

Сечением накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ на подмножестве $U \subset X$ называется отображение $s : U \to \widetilde{\mathcal{F}}$ такое, что $\pi s = 1_U$ — тождественное отображение. Обозначим через $\mathcal{E}(U)$ множество всех сечений и через $\overline{\mathcal{F}(U)}$ множество непрерывных сечений над $U \subset X$.

Упражнение 2.5. *Докажите, что множества сечений $\{\mathcal{E}(U) | U \in \mathfrak{U}\}$ и $\{\overline{\mathcal{F}(U)} | U \in \mathfrak{U}\}$ вместе с естественными отображениями ограничений сечений на подмножества образуют пучки. Они называется пучком всех сечений и пучком непрерывных сечений накрытия соответственно.*

Наша ближайшая цель — сопоставить всякому предпучку $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U), r_V^U\}$ на X некоторое накрытие $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$.

Будем считать, что сечения $s \in \mathcal{F}(V)$ и $t \in \mathcal{F}(W)$ *эквивалентны в точке* $x \in V \cap W$ (обозначается $s \sim_x t$), если существует открытое множество $x \in U \subset V \cap W$ такое что $r_U^V(s) = r_U^W(t)$. Обозначим через $\mathcal{F}_x = \big(\bigcup\limits_{U \ni x} \mathcal{F}(U)\big)/\sim_x$ множество классов эквивалентности всех сечений в точке x.

Положим $\widetilde{\mathcal{F}} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Сопоставим точке $x \in U \in \mathfrak{U}$ и сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ класс эквивалентности $s_x \in \mathcal{F}_x$ сечения s в точке x. Обозначим через $s_U = \bigcup\limits_{x \in U} s_x \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ объединение таких классов. Зададим на $\widetilde{\mathcal{F}}$ топологию, считая, что открытыми являются пустое множество, все множества вида s_U и все объединения таких множеств.

Упражнение 2.6. *Доказать, что описанная конструкция действительно задает структуру топологического пространства на $\widetilde{\mathcal{F}}$. Доказать, что отображение $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$, где $\pi(\mathcal{F}_x) = x$, является накрытием.*

Упражнения 2.5 и 2.6 позволяют сопоставить любому предпучку $\mathcal{F}$ пучок всех сечений $\mathcal{E}$ и пучок $\overline{\mathcal{F}}$ непрерывных сечений накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$.

Сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ (мы будем называть его *абстрактным сечением*) отвечает множество $s_U \subset \widetilde{\mathcal{F}}$, образующее сечение $\bar{s} \in \mathcal{E}(U)$, которое мы будем называть его *геометрическим сечением.*

Упражнение 2.7. *Доказать, что $\bar{s} \in \overline{\mathcal{F}}(U)$, причем соответствия $s \mapsto \bar{s}$ порождает семейство отображений $\tau_U : \mathcal{F}(U) \to \overline{\mathcal{F}}(U)$, образующее морфизм предпучков $\tau_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}}$. Боле того, если $\mathcal{F}$ — предпучок групп, то $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ — пучки групп и $\tau_{\mathcal{F}}$ — морфизм предпучков групп.*

Упражнение 2.8. *Доказать, что морфизм предпучков $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ естественно порождает локальный гомеоморфизм $\widetilde{h} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{B}}$, которое, в свою очередь, естественно порождает морфизм пучков $\bar{h} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{B}}$ такой, что $\tau_{\mathcal{B}} h = \bar{h} \tau_{\mathcal{A}}$.*

Теорема 2.1. *Если $\mathcal{F}$ — пучок, то $\tau_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}}$ — изоморфизм пучков.*

Доказательство. a) *Инъективность.* Пусть $s', s" \in \mathcal{F}(U)$ — абстрактные сечения и $\tau_U(s') = \tau_U(s")$ — отвечающие им геометрические сечения. Рассмотрим произвольную точку $x \in U$. Тогда $s'_x = s"_x$ и, следовательно, существует содержащее точку x открытое множество $V_x \subset U$ такое, что $r^U_{V_x}(s') = r^U_{V_x}(s")$. Таким образом, существует покрытие $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ такое, что $r^U_{V_x}(s') = r^U_{V_x}(s")$. Согласно первой аксиоме пучка отсюда следует, что $s' = s"$.

b) *Сюрьективность.* Пусть $\bar{s} \in \overline{\mathcal{F}}(U)$ — геометрическое сечение и $x \in U$. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и ее прообраза $\bar{x} = \overline{\mathcal{F}}_x \cap \bar{s}$. Согласно нашим определениям, точка $\bar{x}$ имеет окрестность $\bar{s}_x \subset \bar{s}$, порожденную некоторым сечением $s_x \in \mathcal{F}(U_x)$ на $U_x \in U$.

Мы построили покрытие $X = \cup_{x \in X} U_x$ с сечениями $s_x \in \mathcal{F}(U_x)$. На пересечении $U_x \cap U_y$ абстрактные сечения s^x и s^y порождают одно и то же геометрическое сечение $\bar{s}^x|_{U_x \cap U_y} = \bar{s}|_{U_x \cap U_y} = \bar{s}^y|_{U_x \cap U_y}$. Поэтому, согласно уже доказанному свойству инъективности, $s^x|_{U_x \cap U_y} = s^y|_{U_x \cap U_y}$. Ввиду аксиомы 2) пучка, отсюда следует существование сечения $s \in \mathcal{F}(U)$, порождающего сечение $\bar{s}$. □

Следствие 2.1. *Каждый пучок изоморфен пучку непрерывных сечений некоторого накрытия.*

3. Когомологии с коэффициентами в пучке.

3.1. **Каноническая резольвента пучка.** *Далее мы считаем, что все рассматриваемые пучки являются пучками коммутативных групп.*

Рассмотрим произвольный подпучок $\mathcal{A}$ пучка $\mathcal{B}$.

Упражнение 3.1. *Доказать, что, соответствие $U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$ порождает предпучок. Всегда ли это пучок?*

Пучок $\mathcal{C}$, порожденный предпучком $U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$, называется *фактор-пучком* $\mathcal{B}/\mathcal{A}$.

Говорят, что *последовательность гомоморфизмов групп* $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ *точна в* B, если $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Ker}(h)$. Говорят, что *последовательность морфизмов* $\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C}$ *пучков групп над* X *точна в* $\mathcal{B}$, если для любого $x \in X$ индуцированная последовательность групп $\mathcal{A}_x \xrightarrow{g} \mathcal{B}_x \xrightarrow{h} \mathcal{C}_x$ точна в $\mathcal{B}_x$. Говорят, что последовательность морфизмов групп пучков над X $\mathcal{A}_1 \xrightarrow{g} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{h} \mathcal{A}_3 \to \dots \mathcal{A}_n \to \dots$ *точна*, если она точна в каждом члене начиная со второго.

Упражнение 3.2. *Доказать, что естественное вложение подпучка в пучок вместе с естественной проекцией пучка на фактор-пучок порождают точную последовательность пучков $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$*

Упражнение 3.3. *Пусть $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на $\mathbb{C} - 0$, рассматриваемый как группа по сложению, $\mathcal{Z}$ — подпучок постоянных целочисленных функций и $\mathcal{O}^*$ — пучок не обращающихся в 0 голоморфных функций* *на $\mathbb{C}-0$, рассматриваемый как группа по умножению. Тогда последовательность пучков $0 \to \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$, где $\exp(f)(z) = e^{2\pi i f(z)}$, точна, а последовательность гомоморфизмов групп $0 \to \mathcal{Z}(\mathbb{C}-0) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathbb{C}-0) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*(\mathbb{C}-0) \to 0$ не точна.*

Предыдущее упражнение дает пример точной последовательности последовательности пучков, порождающей не точную последовательность сечений. Неточности такого типа характеризуют пучок и являются, по существу, предметом *теории когомологий.*

Точная последовательность пучков вида $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ называется *резольвентой пучка* $\mathcal{F}$.

Упражнение 3.4. *Доказать, что индуцированная резольвентой $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$, последовательность групп $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$, удовлетворяет условиям $\tilde{\alpha}_0\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_{n+1}\tilde{\alpha}_n = 0$ и $\mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_0) = \mathrm{Im}(\tilde{\alpha})$*

Сопоставим произвольному пучку $\mathcal{F}$ резольвенту с помощью следующей конструкции. Согласно теореме 2.1, пучок непрерывных сечений $\overline{\mathcal{F}}$ накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ естественно изоморфен пучку $\mathcal{F}$. Рассмотрим пучок $\mathcal{E}(U) = \{s : U \to \widetilde{\mathcal{F}} | \pi s = 1\}$ всех сечений накрытия π. Естественное вложение непрерывных сечений в произвольные порождает точную в $\mathcal{F}$ последовательность пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}(\mathcal{F})$. Положим $\mathcal{F}^0 = \mathcal{E}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha))$ и обозначим через $\alpha_0 : \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha)) = \mathcal{F}^1$ композицию естественных гомоморфизмов. Мы получили последовательность гомоморфизмов пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1$. Продолжим процесс, то есть положим $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{E}(\mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1}))$, и обозначим через $\alpha_n : \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1}) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1})) = \mathcal{F}^{n+1}$ композицию естественных гомоморфизмов.

Упражнение 3.5. *Доказать, что последовательность пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ является резольвентой.*

Построенная резольвента $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ называется *канонической резольвентой пучка* $\mathcal{F}$.

3.2. **Когомологии.** Пусть $\mathcal{F}$ — пучок над X, $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ — его каноническая резольвента и $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$ — индуцированная последовательность групп глобальных сечений. Тогда группы $H^0(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_0) = \mathcal{F}(X)$, $H^n(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})$ называются *n-тыми группами когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$*. Их прямая сумма $H^*(X,\mathcal{F})$ называется *(полной) группой когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$.*

Это понятие позволяет сопоставить группу произвольному пучку и использовать методы алгебры для изучения геометрических объектов. Простейшие группы такого типа (и мы увидим это далее) можно описать и чисто топологическими методами. Именно так их впервые построил А. Пуанкаре.

Следующая теорема показывает, что соответствие "пучок"$\mapsto$ "когомологии"является функториальным.

Теорема 3.1. *Морфизм* $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B}$ *пучков над* X *порождает гомоморфизмы групп когомологий* $h_n : H^n(X, \mathcal{A}) \to H^n(X, \mathcal{B})$ *такие, что:*

1) $h_0 = h_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X)$ *— гомоморфизм глобальных сечений;*

2) если h *— тождественный морфизм, то* h_n *— тождественный гомоморфизм для любого* n*;*

3) если $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C}$ *— последовательность морфизмов пучков, то* $(lh)_n = l_n h_n$.

Доказательство. Рассмотрим накрытия $f : Y \to X$ и $g : Z \to X$, пучки непрерывных сечений которых изоморфны пучкам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Согласно упражнению 2.8, морфизм h порождает локальный гомеоморфизм, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{h}} & Z \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ X & = & X \end{array}$$

Диаграмма порождает морфизм $h_0 : \mathcal{A}^0 = \mathcal{E}(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^0$ пучков всех сечений накрытий. Этот морфизм замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h_0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 \end{array}$$

где α и β — вложения непрерывных сечений в произвольные. Таким образом, $h_0(\mathrm{Im}\alpha) \subset \mathrm{Im}\beta$.

Рассмотрим накрытия $f^0 : Y^0 \to X$ и $g^0 : Z^0 \to X$, отвечающие пучкам $\mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha)$, и $\mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta)$. Морфизм $h_0 : \mathcal{A}^0 \to \mathcal{B}^0$ порождает морфизм $\mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha) \to \mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta)$, который порождает локальный гомеоморфизм $\tilde{h}_0$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y^0 & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & Z^0 \\ \downarrow f^0 & & \downarrow g^0 \\ X & = & X \end{array}$$

Эта диаграмма порождает морфизм $h_1 : \mathcal{A}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha)) \to \mathcal{B}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta))$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{A}^1 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h_0 & & \downarrow h_1 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B}^1 \end{array}$$

Продолжая процесс, получаем коммутативную диаграмму морфизмов пучков, строки которой — это канонические резольвенты пучков $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{\alpha_1} & \ldots \mathcal{A}^n & \xrightarrow{\alpha_n} \\ & & \downarrow h & & \downarrow h_0 & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_n & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B}^1 & \xrightarrow{\beta_1} & \ldots \mathcal{B}^n & \xrightarrow{\beta_n} \end{array}.$$

Она порождает коммутативную диаграмму гомоморфизмов групп

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{A}^0(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} & \mathcal{A}^1(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} & \dots\mathcal{A}^n(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_n} \\
 & & \Big\downarrow{\tilde{h}} & & \Big\downarrow{\tilde{h}_0} & & \Big\downarrow{\tilde{h}_1} & & \Big\downarrow{\tilde{h}_n} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathcal{B}^0(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_0} & \mathcal{B}^1(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_1} & \dots\mathcal{B}^n(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_n}
\end{array}.$$

Если $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)$ и $b = \tilde{h}_n(a)$, то $\tilde{\beta}_n(b) = \tilde{\beta}_n(\tilde{h}_n(a)) = \tilde{h}_{n+1}(\tilde{\alpha}_n(a)) = 0$. Таким образом, $\tilde{h}_n(\mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{\beta}_n)$. Кроме того, если $a \in \mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})$ и $b = \tilde{h}_n(a)$, то $a = \tilde{\alpha}_{n-1}(\hat{a})$ и $b = (\tilde{\beta}_{n-1}(\tilde{h}_{n-1}\hat{a})) \in \mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1})$. Таким образом, $\tilde{h}_n(\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})) \subset \mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1})$.

Следовательно, гомоморфизм $\tilde{h}_n$ порождает гомоморфизм $h_n : H^n(X, \mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1}) \to \mathrm{Ker}(\tilde{\beta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1}) = H^n(X, \mathcal{B})$. Его свойства 1) и 2) непосредственно следуют из определений.

Для доказательства свойства 3) рассмотрим коммутативную диаграмму резольвент

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{\alpha_1} & \dots\mathcal{A}^n & \xrightarrow{\alpha_n} \\
 & & \Big\downarrow{h} & & \Big\downarrow{h^0} & & \Big\downarrow{h^1} & & \Big\downarrow{h^n} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B}^1 & \xrightarrow{\beta_1} & \dots\mathcal{B}^n & \xrightarrow{\beta_n} \\
 & & \Big\downarrow{l} & & \Big\downarrow{l^0} & & \Big\downarrow{l^1} & & \Big\downarrow{l^n} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{C}^0 & \xrightarrow{\gamma_0} & \mathcal{C}^1 & \xrightarrow{\gamma_1} & \dots\mathcal{C}^n & \xrightarrow{\gamma_n}
\end{array},$$

порождающую коммутативную диаграмму групп

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{A}^0(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} & \mathcal{A}^1(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} & \dots\mathcal{A}^n(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_n} \\
 & & \Big\downarrow{\tilde{h}} & & \Big\downarrow{\tilde{h}_0} & & \Big\downarrow{\tilde{h}_1} & & \Big\downarrow{\tilde{h}_n} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathcal{B}^0(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_0} & \mathcal{B}^1(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_1} & \dots\mathcal{B}^n(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_n} \\
 & & \Big\downarrow{\tilde{l}} & & \Big\downarrow{\tilde{l}_0} & & \Big\downarrow{\tilde{l}_1} & & \Big\downarrow{\tilde{l}_n} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \mathcal{C}^0(X) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_0} & \mathcal{C}^1(X) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_1} & \dots\mathcal{C}^n(X) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_n}
\end{array}.$$

Из наших определений непосредственно следует, что морфизм пучков $l^n h^n$ порождает произведение гомоморфизмов $\tilde{l}_n\tilde{h}_n$. Таким образом, $(\tilde{lh})_n = \tilde{l}_n\tilde{h}_n$ откуда $(lh)_n = l_n h_n$ □

4. Точные последовательности.

4.1. **Мягкие пучки.** Далее мы считаем, что все рассматриваемые топологические пространства X нормальны и парокомпактнны.Топологическое пространство X называется *нормальным*, если выполнена следующая аксиома отделимости. Для любых не пересекающихся замкнутых подмножеств $S, T \subset X$ существуют содержащие их непересекающиеся открытые множества $X \supset U \supset S$, $X \supset V \supset T$.

Парокомпактом называется пространство X, в любое открытое покрытие которого можно вписать консервативное замкнутое покрытие. Объясним эти термины. Говорят, что покрытие $X = \bigcup_{\gamma \in G} S_\gamma$ *вписано в покрытие* $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, если для любого U_α существует S_γ такое, что $S_\gamma \subset U_\alpha$. Покрытие замкнутыми множествами $X = \bigcup_{\gamma \in G} S_\gamma$ называется *консервативным*, если для любого подмножества индексов $\Gamma \subset G$ множество $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$ — замкнуто.

Все метризуемые пространства и, в частности, топологические многообразия являются нормальными паракомпактоми. Топологическая структура пространства X порождает структуру топологического пространства на любом замкнутом подмножестве $S \subset X$. Открытые подмножества S — это пересечения открытых подмножеств X с S. Всякое замкнутое подмножество паракомпакта — паракомпакт.

Отождествим произвольный пучок $\mathcal{F}$ над над топологическим пространством X с пучком непрерывных сечений порожденного им накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ (теорема 2.1). Определим для замкнутого подмножества $S \subset X$ множество $\mathcal{F}(S)$ как множество непрерывных сечений π над S. Эта конструкция порождает отображения ограничения $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$.

Пучок $\mathcal{F}$ над топологическим пространством X называется *мягким*, если отображение $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$ сюръективно, для любого замкнутого подмножества $S \subset X$, то есть любое сечение над S продолжается до сечения над X.

Упражнение 4.1. *Доказать, что*

1. *Пучок $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ произвольных сечений накрытия — мягкий.*
2. *Пучок гладких функций на $\mathbb{R}^n$ — мягкий.*
3. *Пучок голоморфных функций на $\mathbb{C}$ — не мягкий.*
4. *Постоянный пучок (т.е. пучок локально постоянных функций) — не мягкий.*

Как и раньше, говоря о пучках мы будем иметь в виду пучки над фиксированным пространством X.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — мягкий пучок и $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \to 0$ — точная последовательность пучков. Тогда последовательность групп $0 \to \mathcal{A}(X) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{B}(X) \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{C}(X) \to 0$ тоже точна.*

Доказательство. Точность в члене $\mathcal{A}(X)$ сразу следует из точности последовательности пучков в члене $\mathcal{A}$. Точность в члене $\mathcal{B}(X)$ означает, что для любого сечения $b \in \mathcal{B}(X)$ существует переходящее в него под действием $\tilde{g}$ сечение $a \in \mathcal{A}$. Из точности последовательности пучков в члене $\mathcal{B}$ следует, что для любого $x \in X$ существует окрестность U_x и сечение $a_{U_x} \in A(U_x)$ такие, что $\tilde{g}(a_{U_x})$ — это ограничение b на U_x. Таким образом $\tilde{g}(a_{U_x} - a_{U_y}) = 0$ на $U_x \cap U_y$. Ввиду точности в члене $\mathcal{A}(U_x \cap U_y)$ последовательности $0 \to \mathcal{A}(U_x \cap U_y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{B}(U_x \cap U_y) \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{C}(U_x \cap U_y) \to 0$ отсюда следует, что ограничения сечений a_{U_x} и b_{U_x} на $U_x \cap U_y$ совпадают. Согласно второй аксиоме пучка отсюда следует, что все сечения a_{U_x} являются ограничениями одного сечения $a \in \mathcal{A}(X)$ и $\tilde{h}(a) = b$.

Докажем точность в члене $\mathcal{C}(X)$. Пусть $c \in \mathcal{C}(X)$. Тогда для каждого $x \in X$ существует окрестность $x \in U$ и сечение $b \in \mathcal{B}(U)$ такие, что $h(b) = c|_U$. Покроем пространство X парами (U_j, b_j) такого типа. Рассмотрим консервативное покрытие $\{S_i\}$, вписанное в покрытие $\{U_j\}$. Оно порождает множество пар (S_i, s_i), где $s_i \in \mathcal{B}(S_i)$ и $h(s_i) = c|_{S_i}$. Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{S}$ всех пар (S, s), где S — объединение множеств из $\{S_i\}$ и $h(s) = c|_S$. Введем на $\mathfrak{S}$ частичный порядок, считая, что $(S, s) \preceq (S', s')$, если $S \subset S'$ и $s'|_S = s$. Любая упорядоченная цепочка таких пар имеет верхнюю границу — объединение всех элементов цепочки. Следовательно, согласно лемме Цорна, существует максимальная пара $(\bar{S}, \bar{s}) \in \mathfrak{S}$. Осталось доказать, что $\bar{S} = X$.

Пусть это не так. Тогда существует пара $(S_0, s_0) \in \mathfrak{S}$ такая, что $S_0 \not\subseteq \bar{S}$, $S_0 \cap \bar{S} \neq \emptyset$ и $h(\bar{s} - s_0) = 0$ на $S_0 \bigcap \bar{S}$. Ограничим пучки на пространство $S_0 \bigcap \bar{S}$. Из уже доказанной точности в члене $\mathcal{B}(S_0 \bigcap \bar{S})$ следует, что существует сечение $a \in \mathcal{A}(S_0 \bigcap \bar{S})$ такое, что $g(a) = \bar{s} - s_0$. Используя мягкость пучка $\mathcal{A}$, продолжим сечение a до $a_0 \in \mathcal{A}(S_0)$. Рассмотрим сечение $\tilde{s} \in \mathcal{B}(S_0 \bigcup \bar{S})$, такое, что $\tilde{s}|_{\bar{S}} = \bar{s}$ и $\tilde{s}|_{S_0} = s_0 + g(a_0)$. Тогда $(S_0 \bigcup \bar{S}, \tilde{s}) \in \mathfrak{S}$, что противоречит максимальности $(\bar{S}, \bar{s})$. □

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — мягкие пучки и $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \to 0$ — точная последовательность пучков. Тогда пучок $\mathcal{C}$ — мягкий.*

Доказательство. Пусть $S \subset X$ — произвольное замкнутое множество и $c \in \mathcal{C}(S)$. Тогда, согласно теореме 4.1, существует сечение $b \in \mathcal{B}(S)$ такое, что $h(b) = c$. Используя мягкость пучка $\mathcal{B}$, продолжим сечение b до сечения $\tilde{b} \in \mathcal{B}(X)$ и положим $\tilde{c} = h(\tilde{b})$. Тогда $\tilde{c}|_S = c$. □

Теорема 4.3. *Пусть $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ — точная последовательность, состоящая из мягких пучков на X. Тогда последовательность групп $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$ тоже точна.*

Доказательство. Положим $K^0 = \mathcal{F}^0$ и $K^n = \mathrm{Im}(\alpha_{n-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha_n)$ при $n > 0$. Рассмотрим точные последовательности пучков $0 \to K^n \to \mathcal{F}^n \to K^{n+1} \to 0$. Используя индукцию и теорему 4.2, находим, что пучки K^n мягкие. Следовательно, согласно теореме 4.1, последовательность групп $0 \to K^n(X) \to \mathcal{F}^n(X) \to K^{n+1}(X) \to 0$ точна. Последовательность групп $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$ является склейкой последовательностей $0 \to K^n(X) \to \mathcal{F}^n(X) \to K^{n+1}(X) \to 0$. □

Следствие 4.1. *Если $\mathcal{F}$ — мягкий пучок, то $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ при $n > 0$.*

Доказательство. Каноническая резольвента пучка $\mathcal{F}$ состоит из мягких пучков. □

4.2. **Длинная точная последовательность.**

Теорема 4.4. *Точная последовательность пучков $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C} \to 0$ порождает точную последовательность групп когомологий $0 \to H^0(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{h_0} H^0(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{l_0} H^0(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{h_1} H^1(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{l_1} H^1(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_1} H^2(X, \mathcal{A}) \ldots$, называемую длинной точной последовательностью.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1, канонические резольвенты пучков порождают коммутативную диаграмму групп

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha} & \mathcal{A}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_0} & \mathcal{A}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_1} & \ldots\mathcal{A}^n(X) \xrightarrow{\tilde\alpha_n} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_0} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_1} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_n} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) & \xrightarrow{\tilde\beta} & \mathcal{B}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_0} & \mathcal{B}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_1} & \ldots\mathcal{B}^n(X) \xrightarrow{\tilde\beta_n} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l_0} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l_1} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l_n} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & \mathcal{C}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_0} & \mathcal{C}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_1} & \ldots\mathcal{C}^n(X) \xrightarrow{\tilde\gamma_n} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
$$

и отображения h_n, l_n. Построим отображение δ_n.

Ввиду теоремы 4.1 все столбцы, начиная со второго, точны. Рассмотрим $c \in \mathrm{Ker}(\tilde\gamma_n)$. Ввиду точности столбца существует элемент $b \in B^n(X)$ такой, что $\tilde l_n(b) = c$. Положим $b' = \tilde\beta_n b$. Тогда $\tilde l_{n+1}b' = \tilde l_{n+1}(\tilde\beta_n b) = \tilde\gamma_n(\tilde l_n b) = \tilde\gamma_n(c) = 0$. Ввиду точности столбца существует элемент $a \in A^{n+1}(X)$ такой, что $\tilde h_{n+1}(a) = b'$. Более того, $\tilde h_{n+2}(\tilde\alpha_{n+1}a) = \tilde\beta_{n+1}(\tilde h_{n+1}a) = \tilde\beta_{n+1}b' = \tilde\beta_{n+1}\tilde\beta_n b = 0$. Ввиду точности столбца отсюда следует, что $\tilde\alpha_{n+1}a = 0$, то есть $a \in \mathrm{Ker}(\tilde\alpha_{n+1})$.

Пусть теперь $\bar b \in B^n(X)$ другой элемент со свойством $\tilde l_n(\bar b) = c$. Тогда $\tilde l_n(b - \bar b) = 0$ и ввиду точности столбца, $(b - \bar b) = \tilde h(\tilde a)$, где $\tilde a \in A^n(X)$. Поэтому, в виду коммутативности, применяя предыдущую конструкцию к элементу $\bar b$ мы получим элемент $a + \tilde\alpha_n(\tilde a)$. Таким образом, элемент a определен с точностью до $\mathrm{Im}(\tilde\alpha_n)$. Следовательно, соответствие $c \mapsto a$ порождает отображение $\tilde\delta_n : \mathrm{Ker}(\tilde\gamma_n) \to H^{n+1}(X, \mathcal{A})$.

Пусть теперь $c \in \mathrm{Im}(\tilde\gamma_{n-1})$, то есть $c = \tilde\gamma_{n-1}c''$ для некоторого $c'' \in C^{n-1}(X)$. Ввиду точности столбца, существует элемент $b'' \in B^{n-1}(X)$ такой, что $\tilde l_{n-1}(b'') = c''$. Положим $b = \tilde\beta_{n-1}b''$. Ввиду коммутативности диаграммы $\tilde l_n b = c$. Используя этот b в описанной выше конструкции, находим, что $\tilde\delta_n c = 0$ и, следовательно, $\tilde\delta_n$ порождает гомоморфизм $\delta_n : H^n(X, \mathcal{C}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{A})$.

Докажем точность последовательности когомологий. Начнем с точности в члене $H^n(X, \mathcal{B})$. Равенство $l_n h_n = 0$ следует из точности столбца пучков. Пусть $l_n(\bar b) = 0$. Тогда существует $b \in \bar b$ такой, что $\tilde l_n(b) = 0$. Тогда, в виду точности столбца n, $b = \tilde h_n(a)$ для некоторого $a \in \mathcal{A}(X)$, причем $a \in \mathrm{Ker}(\tilde\alpha_n)$ в виду точности столбца $n+1$. Таким образом a порождает гомологический класс, переходящий в $\bar b$ под действием h_n.

Докажем точность в члене $H^n(X,)$. Действительно, для $b \in \mathrm{Ker}(\tilde\beta_n)$ выполнено $\delta_n l_n(b + \mathrm{Im}(\tilde\beta_{n-1})) = (\tilde h_{n+1})^{-1}\tilde\beta_n(b) = 0$. Если $\delta_n(c + \mathrm{Im}(\tilde\gamma_{n-1})) = 0$ и $c \in \mathrm{Ker}(\tilde\gamma_n)$, то, в виду точности столбцов n и $n+1$, $c = \tilde l_n(b)$, где $\tilde\beta_n(b) = 0$. Таким образом b порождает гомологический класс, переходящий в $c + \mathrm{Im}(\tilde\gamma_{n-1})$ под действием l_n.

Докажем точность в члене $H^n(X, \mathcal{A})$. Действительно $\tilde h_n\tilde\delta_{n-1}(c + \mathrm{Im}(\tilde\gamma_{n-1})) = \tilde\beta_n(\tilde l_n)^{-1}(c) \in \mathrm{Im}(\tilde\beta_n)$, и, следовательно лежит в нулевом классе гомологий. Пусть $a \in \mathrm{Ker}(\tilde h_{n+1})$. Тогда $\tilde h_{n+1}a \in \mathrm{Im}(\beta_n)$, то есть $\tilde h_{n+1}a = \beta_n b$

для некоторого $b \in B^n(X)$. По определению это означает, что $a = \delta_n c$, где $c = \tilde{l}_n(b)$. $\square$

Участвующие в длинной точной последовательности операторы δ_i называются *связывающими* или *оператором Бокштейна.*

Упражнение 4.2. *Доказать, что морфизм (т.е. коммутативная диаграмма) точных последовательностей пучков*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

порождает морфизм (т.е. коммутативную диаграмму) длинных точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{B}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{C}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{B})... \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{A}') & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{B}') & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{C}') & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{A}') & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{B}')... \end{array}$$