Бесконечномерные алгебры Ли и вертекс-операторные алгебры

Задачи 1

1. Рассмотрим представлении алгебры Витта в пространстве с базисом v_k, $k \in \mathbb{Z}$:

$$L_n(v_k) = (k - \alpha - \beta(n+1))v_{k-n}.$$

Записав действие L_n через матричные единицы $E_{i,j}$, вычислите значение японского коцикла на парах L_n, L_m.

2. Пользуясь предыдущей задачей и действием алгебры $\widehat{\mathfrak{a}}_\infty$, постройте действие алгебры Вирасоро на пространстве $F^{(m)}$. Найдите старший вес этого представления, т.е. собственные числа операторов c и L_0 на вакуумном векторе $|m\rangle$.

3. Рассмотрим фоковский модуль B_μ над алгеброй Гейзенберга ($\hbar$ действует умножением на 1, a_0 действуте умножением на μ). Определим действие операторов L_n формулами

$$L_0 = (\mu^2 + \lambda^2)/2 + \sum_{j>0} a_{-j}a_j,$$

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{-j}a_{j+n} + i\lambda n a_n,\ n \neq 0.$$

Докажите, что операторы L_n образуют алгебру Вирасоро и найдите соответствующий центральный заряд.

4. Докажите Предложение 3.7 из книги Kac, Raina. Bombay lectures on Highest-weight representations of infinite-dimensional Lie algebras.

5. Докажите, что любое одномерное центральное расширение простой алгебры Ли тривиально (можно ограничиться случаем $\mathfrak{sl}_n$).

Infinite dimensional Lie algebras and vertex operator algebras

Problems 1

1. Consider a representation of the Witt algebra with a basis v_k, $k \in \mathbb{Z}$:

$$L_n(v_k) = (k - \alpha - \beta(n+1))v_{k-n}.$$

Express the action of the operators L_n in terms of the matrix units $E_{i,j}$ and compute the value of the japanese cocycle on the pairs L_n, L_m.

2. Using the previous problem, construct the structure of the module of the Virasoro algebra on the space $F^{(m)}$ via the $\widehat{\mathfrak{a}}_\infty$ action on $F^{(m)}$. Find the highest weight of this representation, i.e. the eigenvalues of the operators c and L_0 on the vacuum vector $|m\rangle$.

3. Let B_μ be the Fock module of the Heisenberg algebra ($\hbar$ acts as the identity operator and a_0 acts via multiplication by μ). Consider the operators L_n:

$$L_0 = (\mu^2 + \lambda^2)/2 + \sum_{j>0} a_{-j}a_j,$$

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{-j}a_{j+n} + i\lambda n a_n, \; n \neq 0.$$

Prove that the operators L_n satisfy the Virasoro algebra relations and find the central charge.

4. Prove Proposition 3.7 from the book Kac, Raina. Bombay lectures on Highest-weight representations of infinite-dimensional Lie algebras.

5. Prove that any one-dimensional central extension of a simple Lie algebra is trivial (the $\mathfrak{sl}_n$ would suffice).