Листок 3: Нетеровы кольца, кольца частных, целые расширения

Задачи по коммутативной алгебре - матфак ВШЭ

надо сдать до 24.10.2012 включительно

1 Пусть M нетеров A-модуль, а $u : M \to M$ гомоморфизм. Докажите, что если u сюръективен, то u изоморфизм. (Указание: рассмотреть последовательность $Ker(u^i)$).

2 Докажите, что если A нетерово, то кольцо формальных степенных рядов $A[[X]]$ тоже нетерово (можно вдохновляться доказательством теоремы Гильберта о базисе, т.е. нетеровости $A[X]$, используя "младшие" коэффициенты степенных рядов вместо старших).

3 Пусть M – A-модуль. Простой идеал $\mathfrak{p}$ называется ассоциированным с M, если существует такой $x \in M$, что $\mathfrak{p} = Ann(x)$ ($Ann(x)$ – это $\{f \in A | fx = 0\}$, аннулятор x). Что можно сказать о подмодуле M, порожденном x? Покажите, что если A нетерово, то любой ненулевой A-модуль имеет ассоциированные простые идеалы. (Указание: рассмотреть семейство идеалов, являющихся аннуляторами элементов M.)

4 Пусть M – ненулевой нетеров модуль над нетеровым кольцом. Покажите, что существует последовательность подмодулей $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_k = 0$, такая, что фактормодули M_i/M_{i+1} изоморфны $A/\mathfrak{p}_i$ для некоторых простых $\mathfrak{p}_i$.

5 (это проверка деталей утверждения, сформулированного на лекции). Проверьте, что любой идеал в кольце частных $S^{-1}A$ – вида $S^{-1}I$, где I идеал в A. Покажите, что имеется биекция между множеством простых идеалов в $S^{-1}A$ и множеством простых идеалов в A, не пересекающихся с S, непрерывная в топологии Зариского.

6 Пусть S - множество степеней некоторого элемента $x \in A$. Когда кольцо $S^{-1}A$ нулевое? Выведите отсюда еще одно доказательство того факта, что нильрадикал является пересечением всех простых идеалов.

7 Пусть A кольцо и M – A-модуль. Покажите, что если $M_{\mathfrak{m}} = 0$ для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m} \subset A$, то $M = 0$.

8 Пусть $f : M \to N$ – гомоморфизм A-модулей. Покажите эквивалентность следующих условий: (1) f сюръективен; (2) для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$, $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}}$ сюръективен; (3) для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$, $f_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to M_{\mathfrak{m}}$ сюръективен. То же верно и для инъективности.

9 Пусть A кольцо и M – A-модуль. Носитель M - это подмножество $Spec(A)$, состоящее из таких идеалов $\mathfrak{p}$, что $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Покажите, что если M конечно порожден, то его носитель замкнут в топологии Зариского ($Supp(M) = V(??)$). Удобно для начала разобрать случай, когда M порожден одним элементом (что можно тогда сказать об M?)

10 Пусть $A \subset B \subset C$ – кольца. Покажите, что если C цело над B, а B цело над A, то C цело над A.

11 Пусть кольцо B цело над A, $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset B$ – простые идеалы. Покажите, что если $q_1 \cap A = q_2 \cap A$, то $q_1 = q_2$ (можно свести к случаю, когда $q_1 \cap A = q_2 \cap A$ максимален, как в доказательстве сюръективности отображения спектров из лекций).

Целое замыкание A в B - это множество элементов B, целых над A. Оно является подкольцом B. Говорят, что область целостности целозамкнута, если она целозамкнута в своем поле частных. Например, любое факториальное кольцо целозамкнуто (проверить!)

12 Покажите, что $\mathbf{Z}[i]$ область главных идеалов, а значит, факториальна, и в частности – целозамкнута. Указание: придумайте аналог деления с остатком в $\mathbf{Z}[i]$.

13 Целозамкнуто ли $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$?

14 Целозамкнуто ли кольцо $\mathbf{C}[x, y]/(x^2 - y^3)$? Опишите его целое замыкание (в поле частных).