

Листок 2 (принимается 14.10)

2.1. (5-лемма) Покажите, что если в диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \\
 a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & d \downarrow & & e \downarrow \\
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E
 \end{array}$$

с точными строками b и d — мономорфизмы и a — эпиморфизм, то c — мономорфизм, а если b и d — эпиморфизмы и e — мономорфизм, то c — эпиморфизм.

2.2. (3×3 -лемма) Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

коммутативна и все столбцы точны. Докажите, что:

- Если две нижние строки точны, то и верхняя точна.
- Если две верхние строки точны, то и нижняя точна.
- Если верхняя и нижняя строки точны, а композиция стрелок из A в C равна нулю, то и средняя строка точна.

2.3. Пусть Z_\bullet и B_\bullet — циклы и границы комплекса C_\bullet , рассматриваемые как комплексы с нулевым дифференциалом. Покажите, последовательность комплексов

$$0 \longrightarrow Z_\bullet \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{d} B_\bullet[-1] \longrightarrow 0$$

точна. Вычислите связывающий гомоморфизм в соответствующей длинной точной последовательности.

2.4. Пусть X есть $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (сфера Римана) и $Y \subset X$ есть объединение двух разных точек X . Обозначим через \mathcal{J}_Y пучок голоморфных функций на X , зануляющихся на Y (пучок идеалов). Покажите, что $H_X^1(\mathcal{J}_Y) \neq 0$.

2.5. Придумайте точную последовательность $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ локальных систем (=локально постоянных пучков) на окружности, для которой связывающий гомоморфизм $H^0(C) \rightarrow H^1(A)$ ненулевой. Покажите таким образом, что первые когомологии окружности с коэффициентами в постоянном пучке нетривиальны.