1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

2.1 Релятивистская частица

Квадратичное действие

$$S[X] \to S[X,e] = \tfrac{1}{2}\int d\tau \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \tfrac{1}{2}m^2 \int e(\tau) d\tau \tag{2.1}$$

инвариантное относительно репараметризаций

$$\delta X^\mu = \xi \dot{X}^\mu, \qquad \delta e = \frac{d}{d\tau}(\xi e) \tag{2.2}$$

с локальным параметром $\xi = \xi(\tau) = \tau - f(\tau)$. Уравнения движения включают связь

$$\frac{\delta S}{\delta e} = -\frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e^2} - m^2 = 0 \tag{2.3}$$

которую следует учитывать при квантовании.

Какие основные вопросы мы должны поставить при квантовании:

- пространство состояний системы;
- как происходит динамика - выбор времени;
- кто такие наблюдаемые величины.

Для нерелятивистской частицы с действием $S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\ m\dot{\mathbf{x}}^2$ ответы на все вопросы почти очевидны:

- пространство состояний - например функции $\psi(\mathbf{x})$, или фурье образы $\tilde{\psi}(\mathbf{p})$, т.е. функции импульсов $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dot{x}_i/m$;
- время задано изначально. Динамика определяется гамильтонианом $H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$;
- наблюдаемые величины: в классике были функции на фазовом пространстве $f(x,p)$ - превращаются в произвольные дифференциальные операторы в силу канонических коммутационных соотношений

  $$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{2.4}$$

  т.е., например $p_i \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Удобнее однако для свободной частицы пользоваться импульсным представлением, поскольку импульсы $\frac{d}{dt}p_i = 0$ являются интегралами движения (что верно и для гейзенберговых операторов, так как они коммутируют с гамильтонианом $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$), а волновая функция будет просто умножаться на фазу.

Что возникает при наивном подходе в релятивистском случае. Посмотрим на действие формально, и перейдем к гамильтонову формализму, считая временем параметр на мировом листе, тогда

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{\dot{X}_\mu}{e}, \qquad p_e = 0$$
$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = 0 \tag{2.5}$$

однако в силу связи

$$P_\mu P^\mu + m^2 = 0 \tag{2.6}$$

состояния определяются, например, лишь пространственными компонентами импульса. Другими словами, пространство состояний может быть описано функциями $\phi_\pm(\mathbf{p})$, которые естественным образом связаны с решениями уравнения Клейна-Гордона.

Действительно, канонические коммутационные соотношения в данном случае ($\hbar = 1$)

$$[X^\mu, P_\nu] = i\delta^\mu_\nu \tag{2.7}$$

релятивистски-ковариантны ($[X^\mu, P^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$, $[X_\mu, P_\nu] = i\eta_{\mu\nu}$), и если описывать пространство состояний в координатном представлении, то $P_\mu = -i\frac{\partial}{\partial X^\mu} \equiv -i\partial_\mu$ и на волновую функцию возникает связь

$$\left(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi(X) = 0 \tag{2.8}$$

буквально представляющая из себя уравнение Клейна-Гордона. Его решение

$$\begin{aligned}\phi(X) &= \int d^4P e^{-iPX}\tilde{\phi}(P) = \int d^4P e^{-iPX}\delta(P^2+m^2)\breve{\phi}(P) = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\mathcal{E}(\mathbf{p})}\left(e^{i\mathcal{E}(\mathbf{p})t - i\mathbf{px}}\phi_+(\mathbf{p}) + e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t - i\mathbf{px}}\phi_-(\mathbf{p})\right)\end{aligned} \tag{2.9}$$

представляет собой два набора волн-частиц (одночастичных состояний с $\mathcal{E}_\pm = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2} \equiv \pm\mathcal{E}(\mathbf{p})$), локализованных на массовой поверхности

$$\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \tag{2.10}$$

Заметим, что наивный гамильтониан

$$\mathcal{H} = P_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L} = \tfrac{1}{2}e\left(P_\mu P^\mu + m^2\right) \tag{2.11}$$

в силу уравнения связи просто равен нулю.

2.2 Квантование фермионной частицы

Вспомним теперь действие для безмассовой фермионной частицы

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau \left(\frac{\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu}{e} + i\Psi_\mu \dot{\Psi}^\mu + i\frac{\chi}{e}\Psi_\mu \dot{X}^\mu \right) \tag{2.12}$$

в пространстве-времени Минковского. Теперь в дополнении к

$$\begin{gathered} P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{\dot{X}_\mu}{e} + \frac{i}{2}\frac{\chi}{e}\Psi_\mu, \qquad p_e = 0 \\ \frac{dP_\mu}{d\tau} = 0 \end{gathered} \tag{2.13}$$

следует добавить

$$\begin{gathered} \Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^\mu} = -\frac{i}{2}\Psi_\mu, \qquad \Pi_\chi = 0 \\ \frac{d\Pi_\mu}{d\tau} = -\frac{i}{4}\chi P_\mu \end{gathered} \tag{2.14}$$

где еще следует уточнить - как именно дифференцировать по грассмановым переменным. Кроме того, следует помнить, что у нас есть две связи

$$\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu + i\frac{\chi}{e}\Psi_\mu \dot{X}^\mu = 0, \qquad \text{or} \quad P_\mu P^\mu = 0 \tag{2.15}$$

и равенство нулю суперзаряда

$$Q = \frac{\dot{X}_\mu \Psi^\mu}{e} = 0, \qquad \text{or} \quad \Psi^\mu P_\mu = 0 \tag{2.16}$$

Почему фермионы? На этот вопрос может ответить только квантовая теория - при наивном квантовании от скобок Пуассона $\{X^\mu, P_\nu\} = \delta^\mu_\nu$ и $\{\Psi^\mu, \Pi_\nu\} = \delta^\mu_\nu$ мы переходим к

$$[X^\mu, P_\nu] = i\delta^\mu_\nu, \qquad [\Psi^\mu, \Pi_\nu]_+ = i\delta^\mu_\nu \tag{2.17}$$

коммутаторам и анти-коммутаторам. С первым мы уже разобрались, а второе в силу линейной связи между Ψ^μ и Π_ν приводит к соотношению

$$\Psi^\mu \Psi^\nu + \Psi^\nu \Psi^\mu = -2\eta^{\mu\nu} \tag{2.18}$$

алгебры Клиффорда на квантовые переменные $\Psi^\mu \to \gamma^\mu$. Таким образом, в пространстве состояний фермионной частицы:

- действует алгебра Клиффорда, т.е. волновые функции несут на себе значок ее представления

  $$|\mathbf{p}, \alpha, \pm\rangle \to \psi^\pm_\alpha(\mathbf{p}), \qquad \alpha = 1, \ldots, D/2 \tag{2.19}$$

  в котором проквантованные операторы Ψ^μ действуют гамма-матрицами $\gamma^\mu = \|\gamma^\mu_{\alpha\beta}\|$;

- суперзаряд превращается в оператор Дирака

$$\hat{D} = i\gamma^\mu P_\mu, \qquad \hat{D}\psi = 0 \tag{2.20}$$

а волновые функции можно отождествить с решениями уравнения Дирака - фермионами со спином $\frac{1}{2}$ в D-мерном пространстве-времени.

2.3 Евклидово действие и континуальный интеграл

Интеграл по путям в релятивистской евклидовой квантовой механике естественно формально записать как

$$\int DeDX\ e^{-\int_0^1 dt\left(\frac{\dot{X}^2}{2e}+\frac{1}{2}em^2\right)} = \int De\ e^{-\frac{m^2}{2}\int_0^1 dte} \int DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2e}} \tag{2.21}$$

где мы выделили гауссов интеграл во внешней одномерной метрике $e(t)$. Заметим сразу, что в силу репараметризационной инвариантности можно надеяться, что интеграл по одномерным метрикам так или иначе сведется к интегралу по длинам траекторий $T = \int_0^1 dte$.

Об этом дальше, а сначала рассмотрим гауссов интеграл по координатам, в котором сразу выберем $e(t) = T$

$$I(T) = \int DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T}} \tag{2.22}$$

Пусть для определенности $X(t)$ определена на отрезке $t \in [0,1]$ с нулевыми граничными условиями $X(0) = 0$ и $X(1) = 0$ [1]. В пространстве таких функций можно выбрать естественный базис, и любую функцию представить как

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin(\pi kt), \quad \dot{X}(t) = \pi\sum_{k=1}^{\infty} kx_k \cos(\pi kt) \tag{2.23}$$

Тогда

$$S[X] = \int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T} = \frac{\pi^2}{2T}\sum_{k,l=1}^{\infty} kx_k lx_l \int_0^1 dt\cos(\pi kt)\cos(\pi lt) = \frac{\pi^2}{4T}\sum_{k=1}^{\infty} k^2x_k^2 \tag{2.24}$$

[1]Доказать, что для произвольных $X(0) = X_0$ и $X(1) = X_1$ сдвинув переменную интегрирования

$$X(t) = Y(t) + X_0 + \frac{X_1 - X_0}{T}t$$

и считая, что при линейном сдвиге $DX = DY$, мы получим, что

$$\int_{X(0)=X_0,X(1)\ =X_1} DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T}} = e^{-\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}} I(T)$$

а меру интегрирования было бы естественно определить как $DX = \mathcal{N}\prod_{k=1}^{\infty} dx_k$, где $\mathcal{N}$ - некоторая "нормировочная" постоянная. Строго говоря, так поступать нельзя - в том смысле, что константа $\mathcal{N}$ окажется "особой", так как интегрирование в функциональном интеграле проводится вовсе не по гладким траекториям (вопрос из "теории меры").

Результат интегрирования в (2.22) теперь легко формально записать в виде

$$\begin{aligned} I(T) &= \mathcal{N}\int \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \exp\left(-\frac{\pi^2}{4T}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2\right) = \\ &= \mathcal{N}\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\pi}{a_k}}\bigg|_{a_k=\frac{\pi^2 k^2}{2T}} = \mathcal{N}\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{4T}{\pi k^2}} \end{aligned} \tag{2.25}$$

и для интерпретации этого ответа необходимо сначала определить нормировочную константу $\mathcal{N}$.

Константу $\mathcal{N}$ можно зафиксировать, например, потребовав

$$\int DXe^{-\frac{1}{2}\|X\|^2} = \mathcal{N}\int \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \exp\left(-\frac{T}{4}\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right) = 1 \tag{2.26}$$

что с очевидностью даёт $\mathcal{N} = \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{T}{4\pi}}$, где $T = \int_0^1 dte(t)$ - "собственная длиной траектории", а

$$\|X\|^2 = \int_0^1 dt\, TX(t)^2 = \int_0^T dte(t)X(t)^2 \tag{2.27}$$

представляет собой ничто иное как репараметризационно-инвариантную норму. Тогда

$$I(T) = \mathcal{N}\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{4T}{\pi k^2}} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{T}{\pi k} \tag{2.28}$$

Чему равно бесконечное произведение в правой части? После логарифмирования

$$\log I(T) = \sum_{k=1}^{\infty}\log T - \sum_{k=1}^{\infty}\log(\pi k) \tag{2.29}$$

бесконечную константу можно "забыть", а коэффициент перед $\log T$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\bigg|_{s=0} = \zeta(0) = -\tfrac{1}{2} \tag{2.30}$$

вычислить, например, с помощью аналитического продолжения ζ-функции. Таким образом, получаем

$$I(T) = \int_{X(0)=0}^{X(1)=0} DXe^{-\int_0^1 d\tau\frac{\dot{X}^2}{2T}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{T}} \tag{2.31}$$

а конечной перенормировкой константу можно считать равной единице.

Очевидные обобщения:

- В случае многих переменных $X_\mu = X_\mu(\tau)$, $\mu = 1, \ldots, D$ - для D-мерной релятивистской механики

$$I(T) = \int_{X_\mu(0)=0}^{X_\mu(1)=0} DX e^{-\int_0^1 d\tau \frac{\dot{X}_\mu^2}{2T}} = \frac{1}{T^{D/2}} \tag{2.32}$$

- а для ненулевых граничных условий

$$I(T|X_1^\mu, X_0^\mu) = \int_{X^\mu(0)=X_0^\mu}^{X^\mu(1)=X_1^\mu} DX e^{-\int_0^1 d\tau \frac{\dot{X}_\mu^2}{2T}} = \frac{e^{-\frac{(X_1^\mu - X_0^\mu)^2}{2T}}}{T^{D/2}} \tag{2.33}$$

Вопрос: удовлетворяет ли ответ уравнению Шредингера - и если да, то почему?

2.4 Интеграл по фермионам

Фермионный аналог

$$I(T) = \int_{\Psi(0)=\gamma} D\Psi e^{-\frac{1}{2}\int_0^1 d\tau \Psi\dot{\Psi}} = \text{const} \tag{2.34}$$

Очевидная часть: действие первого порядка $\int_0^1 d\tau\Psi\dot{\Psi}$ на решении уравнения движения $\dot{\Psi} = 0$ само обращается в нуль. Чуть менее очевидная часть - интеграл вообще не зависит от метрики на мировой линии, и поэтому является константой.