1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

3.1 Регуляризация и формула Пуассона

Вспомним, что мы начали вычислять *струнную корреляционную функцию* [1]

$$\mathcal{K}(X_1, X_0) = \int DeDX\ e^{-\int_0^1 dt\left(\frac{\dot{X}^2}{2e}+\frac{1}{2}em^2\right)} = \int De\ e^{-\frac{m^2}{2}\int_0^1 dte} \int DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2e}} \tag{3.1}$$

для начала положив $e(t) = T$ в гауссовом интеграле

$$I(X_1, X_0; T) = \int DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T}} = e^{-\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}} I(T) \tag{3.2}$$

где $I(T)$ интеграл уже с нулевыми граничными условиями.

Распишем теперь аккуратнее результат гауссова интегрирования по координатам частицы с нулевыми условиями (во внешней одномерной метрике $e(t) = T$)

$$S[X;T] = \int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 dt\ TX\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right)X = \tfrac{1}{2}(X, \Delta X) \tag{3.3}$$

где скалярное произведение согласовано с репараметризационно-инвариантной нормой

$$\|X\|^2 = \int_0^T d\tau X(\tau)^2 = \int_0^1 dt\ TX(t)^2 = \int_0^1 dte(t)X(t)^2 \tag{3.4}$$

Для нулевых граничных условий $\int DXe^{-S[X;T]} = (\det\Delta)^{-D/2}$, где

$$\det\Delta = \det\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) = \prod_{n>0}\frac{\pi^2 n^2}{T^2} \tag{3.5}$$

[1] Корреляционные функции в одномерной теории, например $\langle X^\mu(t)X^\nu(t')\rangle_X$ мы потом разберем отдельно.

или [2]

$$
\begin{aligned}
D(T) = -\log\det\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) = -\mathrm{Tr}\log\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) = \\
= -\sum_{n>0}\log\frac{\pi^2 n^2}{T^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\sum_{n>0} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{T^2}}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Ряд под интегралом сходится абсолютно при $t > 0$, но сам интеграл по параметру расходится на нижнем пределе $t \to 0$. Можно ввести регуляризацию - обрезание этого интеграла при $\epsilon^2 > 0$

$$
\begin{aligned}
D(T|\epsilon) = \int_{\epsilon^2}^\infty \frac{dt}{t}\sum_{n>0} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{T^2}} \underset{t=T^2x}{=} \int_{\epsilon^2/T^2}^\infty \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} = \\
= \int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} + \int_1^\infty \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} = \\
\equiv D_0(T|\epsilon) + D_1
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Второе слагаемое не зависит не только от ϵ, но и от длины траектории T, и является конечной константой (а на *конечные* константы в теорфизике часто можно просто "не обращать внимания").

Для манипуляций с первым членом удобно вспомнить про тэта-функции и тэта-константы:

$$
\begin{aligned}
\theta(z|\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\tau n^2 + 2\pi i n z} \\
\theta(0|i\pi x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2 x} = 1 + 2\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

[2]Это все те же формальные манипуляции с ζ-функциями:

$$
\begin{aligned}
\zeta_\Delta(s) = \sum_k \lambda_k^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{dt}{t} t^s \sum_k e^{-\lambda_k t} = s\zeta_\Delta(0)' + O(s^2) \\
\zeta_\Delta(0)' = -\sum_k \lambda_k^{-s}\log\lambda_k\Big|_{s=0} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\sum_k e^{-\lambda_k t}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

и их модулярные преобразования [3]

$$\begin{aligned} \theta(0|-1/\tau) &= (-i\tau)^{1/2}\theta(0|\tau) \\ \theta(0|i\pi x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\theta(0|i/\pi x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left(1+2\sum_{n>0} e^{-\frac{n^2}{x}}\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} D_0(T|\epsilon) &= \int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} = \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\theta(0|i\pi x)-1\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}}-1\right) + \int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sum_{n>0} e^{-\frac{n^2}{x}} = \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}}-1\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}\sum_{n>0} e^{-\frac{n^2}{x}} \end{aligned} \tag{3.13}$$

где второе слагаемое в правой части представляет собой уже сходящийся интеграл (при $\epsilon \to 0$), т.е. опять независящую от T *конечную* константу. Тем самым мы выделили *расходимость*

$$\begin{aligned} D_{\text{sing}}(T|\epsilon) &= \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}}-1\right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}}+\log\sqrt{x}\right)\Bigg|_{\epsilon^2/T^2}^1 = \\ &= \frac{T}{\sqrt{\pi}\epsilon} - \log\frac{T}{\epsilon} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{T}{\sqrt{\pi}\epsilon} - \log\frac{T}{\epsilon} + \text{finite} \end{aligned} \tag{3.14}$$

и получили, что

$$\det\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) \simeq \ e^{-D_{\text{sing}}(T|\epsilon)} = \frac{T}{\epsilon}\exp\left(-\frac{T}{\sqrt{\pi}\epsilon}\right) \tag{3.15}$$

с точностью до конечной константы.

---

[3]Являющиеся следствием формул пересуммирования Пуассона

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(z-k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i n z}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} dz f(z) e^{-2\pi i n z} \tag{3.10}$$

для функции $f(z) = e^{-\pi^2 x z^2}$ при $x > 0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 x k^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} dz e^{-\pi^2 x z^2} e^{-2\pi i n z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2}{x}} \tag{3.11}$$

3.2 Перенормировка: простейший вариант

Таким образом, для интеграла по путям частицы в D-мерном пространстве-времени получаем равенство (с точностью до несущественных конечных констант)

$$e^{-\frac{1}{2}Tm^2} I(T) = e^{-\frac{T}{2}\left(m^2 - \frac{D}{\sqrt{\pi}\epsilon}\right)} \left(\frac{\epsilon}{T}\right)^{D/2} \tag{3.16}$$

и видим, что ответ имеет особенности при $\epsilon \to 0$ в двух местах. Важно, что обе эти особенности *устранимы*.

- Общий фактор $\epsilon^{D/2}$, связан с тем, что мы пытались выразить меру через интегрирование по коэффициентам Фурье. Это определение плохо учитывает вклад недифференцируемых траекторий [4], поэтому его можно использовать лишь с точностью до именно такого особого множителя. К счастью, сам этот множитель не зависит ни от каких физических параметров - прежде всего от длины $T = \int_0^1 dte(t)$, поэтому его можно просто "загнать в нормировку" меры.

- С сингулярной зависимостью от ϵ в экспоненте формулы (3.16) дело хуже, но избавиться от него можно очевидным образом: считать что затравочная масса сама зависит от обрезания ϵ, т.е. $m \to m_0(\epsilon)$, так что именно

  $$m_0^2(\epsilon) - \frac{D}{\sqrt{\pi}\epsilon} = m^2 \tag{3.17}$$

  и является реальной физической массой частицы. Эта процедура, на первый взгляд полная глупость, называется квантовой перенормировкой классических параметров теории, и имеет реальный физический смысл [5].

- Теории, в которых сингулярности, возникающие при снятии обрезания, можно устранить переопределением изначально существующих в них параметров, называются *перенормируемыми*. Физический смысл перенормируемости достаточно прост - в таких теориях физика больших расстояний не зависит от того, что происходит на малых. В нашем случае - квантовые поправки к классическим траекториям частицы лишь слегка подправляют классическое движение по прямым, а вклады старших Фурье-мод несущественны.

---

[4] См. задачу про вычисление среднего квадрата скорости.

[5] Так например в данном случае легко понять, что если мы вычисляем на решетке с шагом ϵ сумму $\sum_{A\to B} e^{-mL(A,B)}$, где - $L(A,B)$ расстояние между точками A и B, то такая сумма имеет непрерывный предел только если сделать затравочную массу зависимой от шага решетки ϵ.

3.3 Мера на одномерных метриках

Таким образом, после проведенной перенормировки нам осталось проинтегрировать по метрикам De выражение $e^{-\frac{Tm^2}{2}}e^{-\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}}/T^{D/2}$, зависящее только от длины $T=\int_0^1 dte(t)$. При этом естественно считать, что

$$\int De\ f(T) = \int \frac{D\xi}{\mathcal{V}}\int_0^\infty dTJ(T)f(T) = \int_0^\infty dTJ(T)f(T) \tag{3.18}$$

где $\frac{D\xi}{\mathcal{V}}$ отвечает интегралу по группе преобразований, нормированный на ее объем, а $J(T)$ - якобиан, возникающих при замене переменных.

Разберем сначала простой пример двумерного интеграла

$$\int \frac{dxdy}{2\pi}f(\sqrt{x^2+y^2}) = \int \frac{d\phi}{2\pi}\int rdrf(r) = \int rdrf(r) \tag{3.19}$$

который является буквальным аналогом нашего (бесконечномерного!) интеграла после отождествлений

$$\int De \leftrightarrow \int \frac{dxdy}{2\pi}, \quad \int \frac{D\xi}{\mathcal{V}} \leftrightarrow \int \frac{d\phi}{2\pi}, \quad r\leftrightarrow T, \quad J(r)=r \tag{3.20}$$

Заметим, что якобиан можно вычислить следующим образом:

- Мера $\frac{dxdy}{2\pi}$ отвечает двумерной метрике dx^2+dy^2;
- Для определения якобиана $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}$ достаточно рассмотреть гауссов интегралом в *касательном* (возможно точнее - кокасательном) пространстве:

$$\begin{gathered} 1 = \int \frac{d(\delta x)d(\delta y)}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left((\delta x)^2+(\delta y)^2\right)} = \\ = \frac{1}{2\pi}\int J(r)d(\delta r)d(\delta\phi)e^{-\frac{1}{2}\left((\delta r)^2+r^2(\delta\phi)^2\right)} = \frac{J(r)}{r} \end{gathered} \tag{3.21}$$

  который приводит, естественно, к ожидаемому ответу. Это одна из реализаций известного *трюка* Фаддеева-Попова.

По аналогии, для меры De введем репараметризационно-инвариантную норму в пространстве малых вариаций δe

$$\|\delta e\|^2 = (\delta e,\delta e) = \int_0^1 dte^{-1}(\delta e)^2 \tag{3.22}$$

и попытаемся ввести координаты во взаимно-ортогональных направлениях относительно этого скалярного произведения. При инфинитезимальной замене параметра на траектории $t \to t - \xi(t)$ одномерная метрика меняется почти очевидным образом

$$\delta_\varepsilon e = \dot{\xi} e + \xi \dot{e} = \frac{d}{dt}(\xi e) \tag{3.23}$$

и совсем очевидно, что ортогональным этому направлению $(\delta_\xi e, \delta_T e)$ при $\xi(0) = \xi(1) = 0$ будет вариация размера $\delta_T e = \frac{\delta T}{T} e$, а на подмногообразии постоянных метрик просто

$$\delta_T e(t) = \delta T \tag{3.24}$$

Больше никаких независимых направлений быть не должно - заменой параметра на траектории любую одномерную метрику можно сделать не зависящей от этого параметра. При этом для полной вариации из нормы (3.22) получим

$$\begin{gathered}
\|\delta e\|^2 = \int_0^1 dt e^{-1} (\delta e)^2 = \int_0^1 dt e^{-1} (\delta_\xi e + \delta_T e)^2 = \\
= \int_0^1 dt e^{-1} \left(\frac{d}{dt}(\xi e) \right)^2 + \frac{(\delta T)^2}{T^2} \int_0^1 dt e = \int_0^1 dt\ e^3\ \xi \left(-e^{-2} \frac{d}{dt} e^{-1} \frac{d}{dt} e \right) \xi + \frac{(\delta T)^2}{T} = \\
= \int_0^1 dt\ e^3\ \xi \Delta_\xi(e) \xi + \frac{(\delta T)^2}{T} = (\xi, \Delta_\xi(e)\xi) + \frac{(\delta T)^2}{T}
\end{gathered} \tag{3.25}$$

где мы ввели зависящий от метрики оператор Лапласа и инвариантную норму на векторных полях

$$\Delta_\xi(e)\xi = -e^{-2} \frac{d}{dt} e^{-1} \frac{d}{dt} e \cdot \xi, \qquad \|\xi\|^2 = (\xi, \xi) = \int_0^1 dt\ e^3(t)\ \xi^2(t) \tag{3.26}$$

После этого якобиан перехода от меры интегрирования по метрикам можно определить стандартным образом

$$\begin{gathered}
1 = \int D(\delta e)\ e^{-\frac{1}{2}\|\delta e\|^2} = \int d(\delta T) \int D\xi\ e^{-\frac{1}{2}\|\delta e\|^2} J(T) = \\
= J(T) \int d(\delta T) e^{-\frac{1}{2}\frac{(\delta T)^2}{T}} \int D\xi\ e^{-\frac{1}{2}(\xi, \Delta_\xi(T)\xi)} = J(T) \sqrt{\frac{T}{\det \Delta_\xi(T)}}
\end{gathered} \tag{3.27}$$

т.е. $J(T) = \sqrt{\frac{\det \Delta_\xi(T)}{T}}$, где детерминант оператора

$$\Delta_\xi(T) = -e^{-2} \frac{d}{dt} e^{-1} \frac{d}{dt} e \bigg|_{e(t)=T} = -\frac{1}{T^2} \frac{d^2}{dt^2} \tag{3.28}$$

действующего на функциях (векторных полях) $\xi(t)$, $0 < t < 1$, который мы уже вычислили (3.15). С учетом перенормировки массы и изменения нормировки меры можно считать, что $\Delta_\xi(T) \simeq T$, как и детерминант оператора (3.5), возникающего из квантовых флуктуаций координат частицы.

Так достаточно часто бывает, оказалось что якобиан что в случае траекторий с *фиксированными концами* $J(T) = 1$ (а например для замкнутых петель - не так!), а стало быть интеграл по одномерным метрикам $\int De \to \int_0^\infty dT$ с точностью до нормировки сводится к интегралу по физически различным конфигурациям - длинам траекторий, с простейшей из возможных мер.

3.4 Результат для пропагатора частицы

Таким образом, $J(T) = 1$, и мы окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(X_1, X_0) &= \int_{X(0)=X_0, X(1)=X_1} DeDX\ e^{-\int_0^1 dt\left(\frac{\dot{X}^2}{2e} + \frac{1}{2}em^2\right)} = \\ &= \int De\ e^{-\frac{m^2}{2}T} \int_{X(0)=X_0, X(1)=X_1} DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2e}} = \int_0^\infty dT\ \frac{e^{-\frac{(X_1^\mu - X_0^\mu)^2}{2T} - \frac{m^2}{2}T}}{T^{D/2}} \end{aligned} \tag{3.29}$$

что представляет собой представление в виде интеграла по собственному времени для фейнмановского пропагатора, или *причинной* функции Грина - после аналитического продолжение в пространство Минковского. Интегральное представление удобно для анализа, например, асимптотических свойств:

- Ультрафиолетовое поведение на малых расстояниях, при $|X_1 - X_0| \to 0$, определяется вкладом малых длин T, массой частицы при этом можно пренебречь, и сделав замену переменных легко получить, что $\mathcal{K}(X_1, X_0) \sim \frac{1}{|X_1 - X_0|^{D-2}}$ при $D > 2$.
- Инфракрасное поведение наоборот определяется свойствами интеграла при больших T, тут значение квадрата массы становится определяющим. Для массивных частиц $m^2 > 0$ интеграл подавлен при $|X_1 - X_0| > 1/m$, для безмассовых частиц возникает "дальнодействие", ну а для тахионов с $m^2 < 0$ просто с треском расходится - чего и следовало бы ожидать в случае бозонной струны.

3.5 Результат для фермионного пропагатора

В данном случае кроме собственной длины траектории остается еще одна неустранимая константа - грассманова переменная

$$\mathcal{X} = \int_0^1 dt \chi \tag{3.30}$$

которая инвариантна относительно репараметризаций и преобразований локальной суперсимметрии на мировой линии. Поэтому результат для фермионного пропагатора

$$\begin{gathered}
G(X_f, X_i) = \int DeD\chi \int_{X_i}^{X_f} DX \int D\Psi \; e^{-\frac{1}{2}\int d\tau\left(\frac{\dot{X}^2}{e}+\Psi\dot{\Psi}+\frac{\chi}{e}\Psi\dot{X}\right)} = \\
= \int_0^\infty dT \int d\mathcal{X} \int_{X(0)=X_0, X(1)=X_1} DX \int D\Psi e^{-\frac{1}{2}\int_0^1 dt\left(\frac{\dot{X}^2}{T}+\Psi\dot{\Psi}+\frac{\mathcal{X}}{T}\Psi\dot{X}\right)} = \\
= \int_0^\infty dT \int d\mathcal{X} \; \frac{e^{-\frac{(X_1^\mu - X_0^\mu)^2}{2T} - \frac{\mathcal{X}}{2T}\gamma_\mu (X_1^\mu - X_0^\mu)}}{T^{D/2}} = \tfrac{1}{2}\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_1^\mu}\mathcal{K}(X_1, X_0)
\end{gathered} \tag{3.31}$$

представляет из себя (безмассовый) пропагатор Дирака-Вейля.