

Задачи для семинара № 2
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014

Начала аналитической теории конических сечений

Задача 1. Вычислить эксцентриситет равносторонней гиперболы (то есть гиперболы, у которой $a = b$).

Задача 2. Вычислить длину отрезка асимптоты гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

заклѳенную между её центром и директрисой.

Задача 3. Найти геометрическое место точек — центров окружностей, касающихся данной прямой l и окружности радиуса r с центром O .

Задача 4. Даны две точки: $A_1 = (-a, 0)$ и $A_2 = (a, 0)$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, проходящих через точки A_1 и A_2 и отсекающих на оси ординат отрезки, произведение длин которых равно b^2 .

Задача 5. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Составить его уравнение в полярной системе координат, принимая за полюс центр, а за направление полярной оси — положительное направление оси Ox .

Задача 6. Какая кривая (указать тип и применимые параметры: полуоси, фокальный параметр, нахождение фокусов и осей и т.д.) задаётся следующим уравнением:

$$\rho = \frac{9}{5 - 4 \cos \varphi}.$$

Задача 7. Пусть M_1M_2 — фокальная хорда конического сечения, то есть хорда, проходящая через фокус F . Доказать, что $\frac{1}{|M_1F|} + \frac{1}{|M_2F|} = \frac{2}{p}$, где p — фокальный параметр.

Задача 8. Найти отношение, в котором центр эллипса (гиперболы) делит отрезок её фокальной оси, заклѳенный между фокусом и соответствующей директрисой.

Задача 9. Дана окружность радиуса a с центром в точке O и её диаметр BC . По окружности движется переменная точка A . На луче OA откладывается отрезок OM , длина которого равна расстоянию от точки A до прямой BC . Найти кривую, описываемую точкой M .

Задача 10*. Даны две точки F_1 и F_2 на расстоянии $2c$ друг от друга. Найти уравнение (в декартовых и полярных координатах) геометрического места точек (называемого лемнискатой Бернулли), произведение расстояний от которого до точек F_1 и F_2 равно c^2 . За начало координат и полюс возьмите середину отрезка F_1F_2 , за ось абсцисс и полярную ось — прямую F_1F_2 . Сделать эскиз лемнискаты Бернулли.

Задача 11*. Даны точка O и прямая l на расстоянии a от точки O . Вокруг точки O вращается проходящий через неё луч. Пусть прямая, содержащая этот луч, пересекает прямую l в переменной точке B . На прямой OB от точки B в направлении луча откладывается отрезок BM , $|BM| = b$, где $b < a$ — некоторое фиксированное число. Найти уравнение кривой (называемой конхойдой Никомеда), описываемой точкой M в декартовых и полярных координатах, принимая за начало координат и полюс точку O , а за ось абсцисс и полярную ось — прямую, перпендикулярную l . Сделать эскиз конхойды Никомеда.

Задача 12*. Как разделить угол на три равные части с помощью циркуля, линейки и конхойды Никомеда?