Задачи для семинара № 1
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014

Геометрическая теория конических сечений

Задача 1. Доказать, что если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадет на директрису. Доказать, что получившаяся точка будет проекцией на директрису точки, в которой касательная касается параболы.

Прямо следует из данного на лекциях построения касательной к параболе. См. также [АЗ, Лемма 1.1].

Задача 2. Доказать, что проекции фокуса параболы на её касательные лежат на прямой, касающейся параболы в её вершине.

Немедленно следует из предыдущей задачи.

Задача 3. Пусть касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P. Доказать, что P является центром описанной окружности треугольника $FX'Y'$, где X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису параболы, а F — фокус этой параболы.

Прямо следует из данного на лекциях построения касательной к параболе. См. также [АЗ, Лемма 1.2].

Задача 4. Пусть касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P, а X', P' и Y' — проекции точек X, P и Y на директрису параболы. Доказать, что P' — середина отрезка $X'Y'$.

Немедленно следует из предыдущей задачи.

Задача 5. Проведём из любой точки P, лежащей снаружи эллипса, две касательных к нему. Пусть они касаются эллипса в точках X и Y, а F_1 и F_2 — фокусы эллипса. Доказать, что углы F_1PX и F_2PY равны.

Указание: построить точки, симметричные фокусам относительно «ближайших» касательных, и воспользоваться оптическим свойством эллипса. См. [АЗ, Теорема 1.3].

Задача 6*. Пусть хорда PQ эллипса проходит через его фокус F_1, а R — точка пересечения касательных к эллипсу в точках P и Q. Доказать, что R — центр вневписанной окружности треугольника F_2PQ, где F_2 — второй фокус эллипса, а также доказать, что F_1 — точка касания этой окружности со стороной PQ.

См. [АЗ, Теорема 1.2].

Список литературы

[АЗ] А. В. Акопян, А. А. Заславский, *Геометрические свойства кривых второго порядка.* М.:МЦНМО, 2011.