

Задачи для семинара № 5
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014

Прямые и плоскости

Задача 1. Дан треугольник ABC с вершинами $A = (4, 4)$, $B = (-6, -2)$ и $C = (-2, -4)$. Написать каноническое, параметрическое и общее уравнение прямой, содержащей медиану угла C .

Задача 2. Написать общее уравнение плоскости по её параметрическому заданию $x = u - 6v$, $y = 1 + 2u$, $z = 2 + 3v$.

Задача 3. Написать каноническое уравнение прямой пересечения плоскостей $x + 2y - z + 2 = 0$ и $2x + y + z + 1 = 0$.

Задача 4. Найти параметрическое и общее уравнение плоскости, проходящей через точки $(-2, 1, 1)$, $(1, 2, 5)$ и $(-1, 2, 3)$.

Задача 5. Написать общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M = (1, 0, -1)$ и содержащей прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$.

Задача 6. Провести плоскость через параллельные прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$, $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{3}$.

Задача 7. Определить взаимное расположение двух прямых. Если прямые пересекаются, найти координаты точки пересечения: а) $3x - y - 2 = 0$ и $6x - 2y - 2 = 0$; б) $2x + 3y + 1 = 0$ и $x = 1 + 3t$, $y = -2 + 2t$; в) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-3}$ и $x = 5 - 2t$, $y = 1 + t$.

Задача 8. Определить взаимное расположение двух плоскостей. Если плоскости пересекаются, найти уравнение прямой пересечения: а) $x + 2y - z + 1 = 0$ и $x + y - 2z + 1 = 0$; б) $x = -3 + u + 4v$, $y = 3 + u + v$, $z = 2 + u + 2v$ и $x + 2y - 3z + 2 = 0$.

Задача 9. Определить взаимное расположение прямых $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ и $x = 6 + 3t$, $y = -1 - 2t$, $z = -2 + t$.

Задача 10. Определить взаимное расположение трёх прямых: а) $3x - y - 2 = 0$, $6x - 2y - 2 = 0$ и $3x - 2y - 2 = 0$; б) $2x + 3y - 1 = 0$, $x = -1 - 3t$, $y = 1 + 2t$ и $x = 2 + 6t$, $y = -1 - 4t$; в) $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$.

Задача 11. Определить взаимное расположение прямой $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ и плоскости $x - 3y + 2z + 5 = 0$. Если они пересекаются, найти координаты точки пересечения.

Задача 12. Определить взаимное расположение трёх плоскостей: а) $x + 2y - z + 7 = 0$, $x + y - 2z + 4 = 0$ и $5x + 3z + 2 = 0$; б) $x - y + 2z + 3 = 0$, $6x - 3y + z - 4 = 0$ и $2x - 2y + 4z + 6 = 0$.

Задача 13. Даны точки $P = (1, 2)$ и $Q = (3, -4)$. Не находя уравнения прямой PQ , найти точку R её пересечения с прямой $x + y - 2 = 0$ и отношение λ , в котором она делит отрезок PQ .

Задача 14. Не находя точку пересечения прямых $2x - 6y + 3 = 0$ и $5x + y - 2 = 0$, провести через неё прямую, проходящую через начало координат.

Задача 15. Доказать, что прямая $5x - y - 5 = 0$ пересекает отрезок прямой $3x - 2y - 6 = 0$, заключённый между осями координат.

Задача 16. Пусть $A = (1, 3, 1)$ и $B = (5, 3, 1)$. Установите, пересекает ли плоскость $x - 4y + 2z - 7 = 0$ отрезок AB , его продолжение за точку A или его продолжение за точку B .

Задача 17. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 2, -1)$ и пересекающуюся с прямыми $\begin{cases} x - z = 0, \\ 3x - 2y - 3 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x + 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$

Задача 18. Через точку $P = (-1, 2, 3)$ провести плоскость так, чтобы в треугольнике, отсекаемом на ней плоскостями координат, точка P была точкой пересечения медиан.