

Задачи для семинара № 3
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014

Векторные и аффинные пространства

Задача 1. Даны три вектора $a = (5, 7, 2)$, $b = (3, 0, 4)$ и $c = (-6, 1, -1)$.
Найти вектор $3a - 2b + c$.

Задача 2. Установить, в каких из нижеследующих случаев тройки векторов a , b и c линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить c как линейную комбинацию a и b :

1) $a = (5, 2, 1)$, $b = (-1, 4, 2)$, $c = (-1, -1, 6)$;

1) $a = (6, 4, 2)$, $b = (-9, 6, 3)$, $c = (-3, 6, 3)$;

1) $a = (6, -18, 12)$, $b = (-8, 24, -16)$, $c = (8, 7, 3)$.

Задача 3. Доказать, что каковы бы ни были три вектора a , b , c и три числа λ , μ и ν , векторы $\lambda a - \mu b$, $\nu b - \lambda c$, $\mu c - \nu a$ компланарны.

Задача 4. Пусть вектор x двумя способами представляется в виде линейной комбинации векторов a_1, \dots, a_n . Доказать, что система a_1, \dots, a_n линейно зависима.

Задача 5. Доказать, что множество всех вещественных многочленов степени не выше 3 является вещественным векторным пространством. Найти размерность и хотя бы один базис.

Задача 6. Является ли множество всех бесконечных арифметических прогрессий с покомпонентными операциями сложения и умножения на число вещественным векторным пространством?

Задача 7. Является ли множество всех бесконечных геометрических прогрессий с покомпонентными операциями сложения и умножения на число вещественным векторным пространством?

Задача 8. Является ли множество монотонных функций на отрезке $[0, 1]$ со стандартными операциями сложения и умножения на число вещественным векторным пространством?

Задача 9. Доказать, что многочлены $2t + t^3$, $t^3 - t^5$ и $t + t^3$ образуют базис в пространстве нечётных многочленов степени не выше 5. Найти координаты многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в этом базисе.

Задача 10. Образуют ли чётные многочлены степени не выше 4 векторное подпространство пространства всех многочленов степени не выше 5?

Задача 11. Рассмотрим множество всех вещественных многочленов степени не выше 3, таких, что $P(0) = 1$. Является ли это множество с естественными операциями векторным пространством? Введите на этом множестве естественную структуру аффинного пространства. Найдите размерность и хотя бы один репер.

Задача 12*. Найти координаты вершин тетраэдра $ABCD$, принимая точку пересечения P медиан грани BCD за начало отсчёта, а векторы BQ , CR , DS — за базисные векторы, где Q , R и S — точки пересечения медиан граней ACD , ABD и ABC соответственно.