

**Задачи для семинара № 4**  
**Геометрия-1**  
**Матфак ВШЭ, осень 2014**

**Евклидово скалярное произведение, ориентированная площадь,  
векторное произведение, смешанное произведение**

**Задача 1.** Вычислить скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если даны координаты точек  $A = (2, 3)$ ,  $B = (3, -1)$ ,  $C = (-1, 4)$ .

**Задача 2.** В треугольнике  $ABC$  даны длины сторон  $|BC| = 5$ ,  $|CA| = 6$ ,  $|AB| = 7$ . Найти скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$ .

**Задача 3.** Доказать, что в правильном тетраэдре отрезок, соединяющий середины противоположных рёбер, является их общим перпендикуляром.

**Задача 4.** Доказать, что ортогональная проекция вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  даётся формулой

$$\frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{b}, \vec{b})} \vec{b}.$$

**Задача 5.** Пусть даны точки  $A = (-2, 3)$ ,  $B = (2, 1)$ ,  $C = (5, -3)$ . Найти площадь треугольника  $ABC$  и длину высоты, опущенной на сторону  $BC$ .

**Задача 6.** Найти векторное произведение  $[\vec{a}, \vec{b}]$  векторов  $\vec{a} = (2, 3, 1)$  и  $\vec{b} = (5, 6, 4)$ .

**Задача 7.** Доказать, что если три вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  не коллинеарны, то равенства  $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$  равносильны выполнению соотношения  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ .

**Задача 8.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = (8, 4, 1)$  и  $\vec{b} = (2, -2, 1)$ .

**Задача 9.** Даны вершины тетраэдра  $A = (2, 3, 1)$ ,  $B = (4, 1, -2)$ ,  $C = (6, 3, 7)$ ,  $D = (-5, -4, 8)$ . Найти длину высоты, опущенной из вершины  $D$ .

**Задача 10.** Доказать, что  $[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{a}, \vec{c}]] = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{a}$  и  $([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$ .

**Задача 11.** Даны три некопланарных вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Найти вектор  $\vec{x}$ , удовлетворяющий системе уравнений  $(\vec{a}, \vec{x}) = \alpha$ ,  $(\vec{b}, \vec{x}) = \beta$ ,  $(\vec{c}, \vec{x}) = \gamma$ .

**Задача 12.** Даны четыре вектора  $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 1)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (2, -1, 2)$ ,  $\overrightarrow{OC} = (0, 2, 1)$ ,  $\overrightarrow{OD} = (2, -2, 1)$ . Лежит ли луч  $OD$  внутри или вне трёхгранного угла  $OABC$ ?

**Задача 13.** В правильном тетраэдре  $ABCD$  проведены два сечения, параллельные рёбрам  $AC$  и  $BD$ . Найти длину ребра тетраэдра, если площади сечений равны  $S_1$  и  $S_2$ , а расстояние между секущими плоскостями равно  $d$ .

**Задача 14.** Доказать, что если в тетраэдре  $ABCD$  ребро  $AB$  перпендикулярно  $CD$ , а  $AC$  перпендикулярно  $BD$ , то рёбра  $AD$  и  $BC$  также перпендикулярны.