Задачи по группам и алгебрам Ли – 3. Касательная алгебра Ли.

Зачет по данному листку ставится в случае сдачи 80% пунктов задач без звездочки. Задачи со звездочкой стоят вдвое дороже. Дедлайн 24 октября.

Векторное поле v на группе Ли G называется *левоинвариантным*, если для любого элемента $g \in G$ выполнено $L_{g*}v = v$. Аналогично определяются *правоинвариантные* векторные поля.

1. а) Докажите, что всякий диффеоморфизм R_g перестановочен со всяким диффеоморфизмом L_h для $g, h \in G$. **б)** Пусть $g(t) \in G$ – гладкий путь в группе G, такой что $g(0) = e$. Докажите, что поле скоростей семейства диффеоморфизмов $R_{g(t)}$ левоинвариантно, а поле скоростей $L_{g(t)}$ – правоинвариантно.

Напомним, что *касательным вектором* к многообразию M в точке $m \in M$ называется линейный функционал $\xi : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, такой, что $\xi(fg) = f(m)\xi(g) + g(m)\xi(f)$ для любых $f, g \in C^\infty(M)$. Пространство касательных векторов в точке m обозначается T_mM. Это пространство является слоем *касательного расслоения* TM в точке $m \in M$. Векторные поля на многообразии M являются гладкими сечениями этого расслоения. В частности, для любого векторного поля $v \in \mathrm{Lie}(M)$ его значением в точке $m \in M$ является касательный вектор $v(m) : f \mapsto v(f)(m)$.

2. а) Докажите, что всякое лево- (а также право-) инвариантное векторное поле однозначно определяется своим значением в точке $e \in G$. **б)** Докажите, что всякое левоинвариантное векторное поле является полем скоростей семейства диффеоморфизмов вида $R_{g(t)}$. **в)** Докажите, что коммутатор левоинвариантных векторных полей является левоинвариантным векторным полем. **г)** Докажите, что всякое левоинвариантное векторное поле коммутирует со всяким правоинвариантным векторным полем.

3. Выпишите в каких-нибудь координатах все левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля на группе Ли **а)** $\mathbb{R}$; **б)** S^1; **в)** обратимых верхнетреугольных матриц 2×2; **г)** $GL_2(\mathbb{R})$; **д)** $GL_n(\mathbb{R})$. *Указание:* на группе GL_n есть глобальные координаты – матричные коэффициенты. В них инвариантные векторные поля писать проще всего.

Формальным отображением n-мерного диска в k-мерный называется набор формальных степенных рядов $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, k$, таких, что $f_i(0, \ldots, 0) = 0$. Для удобства записи мы будем обозначать набор переменных одним символом $\underline{x} := (x_1, \ldots, x_n)$, и набор рядов тоже одним символом, $\underline{f}(\underline{x})$. Композицией формальных отображений $\underline{f} \circ \underline{g}$ называется результат подстановки ряда $\underline{g}$ в $\underline{f}$, т.е. $\underline{f}(\underline{g}(\underline{x}))$. Тождественным формальным отображением называется ряд $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{x}$.

4. Докажите, что формальное отображение $\underline{f}(\underline{x})$ n-мерного диска в себя обратимо тогда и только тогда, когда $\underline{f}(\underline{x}) = A(\underline{x}) + \overline{o}(\underline{x})$, где A – обратимый линейный оператор, а $\overline{o}(\underline{x})$ – ряд из мономов степени строго выше 1. Такие формальные отображения называются *формальными заменами координат* и образуют группу относительно композиции.

n-мерной *формальной группой* (или *формальным групповым законом*) называется формальное отображение $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y})$ из $2n$-мерного диска в n-мерный, такое, что $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} + \underline{y} + \overline{o}(\underline{x}, \underline{y})$ и

$$\underline{F}(\underline{x}, \underline{F}(\underline{y}, \underline{z})) = \underline{F}(\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}), \underline{z}).$$

Гомоморфизмом n-мерной формальной группы $\underline{F_1}$ в k-мерную формальную группу $\underline{F_2}$ называется формальное отображение $\underline{f}$ n-мерного диска в k-мерный такое, что $\underline{F_2}(\underline{f}(\underline{x}), \underline{f}(\underline{y})) = \underline{f}(\underline{F_1}(\underline{x}, \underline{y}))$. В частности, изоморфизмом называется формальная замена координат, переводящая одну формальную группу в другую.

5. а) (Аксиома единицы) Пусть $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y})$ – формальный групповой закон. Докажите, что $\underline{F}(\underline{x}, \underline{0}) = \underline{x} = \underline{F}(\underline{0}, \underline{x})$. **б)** (Аксиома обратного) Докажите, что существует единственное формальное отображение $\underline{s}(\underline{x})$ из n-мерного диска в себя, такое, что $\underline{F}(\underline{x}, \underline{s}(\underline{x})) = \underline{0} = \underline{F}(\underline{s}(\underline{x}), \underline{x})$. *Указание:* $\underline{s}(\underline{x}) = -\underline{x} + \overline{o}(\underline{x})$, а коэффициенты при мономах высших степеней находятся последовательно по индукции.

6. а) Пусть G – группа Ли, и $x_1, \ldots, x_n$ – локальные координаты в окрестности точки $e \in G$, такие, что $e = (0, \ldots, 0)$. Докажите, что операция умножения $G \times G \to G$, записанная в этих координатах, есть формальный групповой закон. **б)** Докажите, что гомоморфизм групп Ли, записанный в таких локальных координатах, является гомоморфизмом соответствующих формальных групп.

7. а) Докажите, что следующие ряды задают одномерные формальные группы: $F(x, y) = x + y$ (аддитивная формальная группа) и $F(x, y) = x + y + xy$ (мультипликативная формальная группа). **б)** Докажите, что эти формальные группы изоморфны.

8*. а) Докажите, что для любой формальной группы $\underline{F}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{x}+\underline{y}+B(\underline{x},\underline{y})+\bar{o}(\underline{x}^2,\underline{x}\underline{y},\underline{y}^2)$, где $B(\underline{x},\underline{y})$ – билинейная операция. **б)** Докажите, что операция $B(\underline{x},\underline{y})-B(\underline{y},\underline{x})$ кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби.

Пусть G – Группа Ли. *Касательной алгеброй Ли* называется пространство $\mathfrak{g} := T_eG$ (касательное пространство к группе G в единице) со структурой алгебры Ли, заданной одним из следующих эквивалентных способов.

(1) Для любого $\xi \in T_eG$ существует единственное левоинвариантное векторное поле l_ξ, такое, что $l_\xi(e) = \xi$. Пусть $\xi, \eta \in \mathfrak{g} = T_eG$. Тогда $[\xi,\eta] := -[l_\xi, l_\eta](e)$.
(2) Пусть r_ξ правоинвариантное векторное поле, такое, что $r_\xi(e) = \xi$. Тогда $[\xi,\eta] := [r_\xi, r_\eta](e)$.
(3) Локальные координаты в окрестности единицы являются координатами на касательном пространстве. В этих координатах коммутатор совпадает с операцией из задачи 8, $[\underline{x},\underline{y}] = B(\underline{x},\underline{y})-B(\underline{y},\underline{x})$.

9*. Докажите, что приведенные определения касательной алгебры Ли в самом деле эквивалентны. *Указание:* пользуясь задачей 2б, докажите, что третье определение эквивалентно двум первым.

10. а) Докажите, что касательная алгебра Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ группы Ли $GL_n(\mathbb{R})$ есть матричная алгебра с операцией коммутатора, $Mat_n(\mathbb{R})^-$. *Указание:* проще всего воспользоваться определением касательной алгебры через формальную группу, взяв в качестве координат матричные коэффициенты. **б)** Пусть G – подгруппа Ли в $GL_n(\mathbb{R})$. Докажите, что касательное пространство $\mathfrak{g} = T_eG \subset Mat_n(\mathbb{R})$ замкнуто относительно операции коммутатора, и операция на $\mathfrak{g}$ как на касательной алгебре Ли группы G есть ограничение операции коммутатора в матричной алгебре. **в)** Выпишите коммутатор в касательной алгебре группы $SO_3(\mathbb{R})$ в каком-нибудь базисе. **г)** Тот же вопрос для группы SU_2.

Напомним, что касательный вектор $\xi \in T_mM$ называется вектором скорости параметризованной гладкой кривой $\gamma(t) \in M$ $(t \in (-\epsilon,\epsilon))$ в точке $t=0$, если $m=\gamma(0)$ и $\xi(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t))$. Кривая $\gamma(t)$ называется *интегральной кривой* векторного поля $v \in \mathrm{Lie}(M)$, если для всякого t_0 касательный вектор $v(\gamma(t_0))$ является вектором скорости кривой $\gamma(t)$ в точке t_0. Теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения утверждает, что для гладкого векторного поля через каждую точку, в которой это поле не обращается в нуль, проходит единственная интегральная кривая.

11. а) Пусть $\gamma(t)$ – интегральная кривая левоинвариантного векторного поля v, такая, что $\gamma(0)=e$. Докажите, что γ продолжается до гладкого отображения $\gamma : \mathbb{R} \to G$, и это отображение есть гомоморфизм групп Ли. *Указание:* надо доказать, что $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$. Покажите, что при фиксированном s обе части равенства являются интегральными кривыми одного и того же векторного поля, проходящими через одну и ту же точку. **б*)** Докажите, что всякая связная одномерная группа Ли изоморфна либо $\mathbb{R}$ по сложению, либо $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. **в*)** Докажите, что любые две одномерные формальные группы изоморфны.

Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее касательная алгебра Ли. Каждому элементу $x \in \mathfrak{g}$ соответствует интегральная кривая $\gamma_x(t)$ соответствующего левоинвариантного векторного поля. *Экспоненциальное отображение* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ определяется следующим образом: $\exp(x) := \gamma_x(1)$. Согласно задаче 11а, это отображение определено на всей алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

12. а) Докажите, что для группы Ли $GL_n(\mathbb{R})$ экспоненциальное отображение – это обычная матричная экспонента. **б)** Докажите, что это так и для любой подгруппы Ли в $GL_n(\mathbb{R})$.

13. а*) Докажите, что экспоненциальное отображение гладко. *Указание:* вспомните нужную теорему из дифференциальных уравнений. **б)** Докажите, что $d_0 \exp = \mathrm{id} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, и, таким образом, $\exp$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на некоторую окрестность единицы в G. **в)** Докажите, что экспоненциальное отображение *функториально*, т.е. для любого гомоморфизма групп Ли $\varphi : G \to H$ имеем $\exp \circ d_e\varphi = \varphi \circ \exp$. **г)** Докажите, что если $[x,y]=0$, то $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

14*. Опишите все связные абелевы группы Ли с точностью до изоморфизма.

15. Пусть A – конечномерная алгебра (не обязательно ассоциативная). Докажите, что алгебра Ли $Der(A)$ является касательной алгеброй группы Ли $Aut(A)$ автоморфизмов алгебры A.

16. а) Докажите, что открытая погруппа в группе Ли является объединением ее компонент связности. *Указание:* всякий смежный класс такой подгруппы тоже открыт. **б)** Докажите, что связная группа Ли порождается любым своим открытым подмножеством. **в)** Докажите, что гомоморфизм связных групп Ли однозначно задается своим дифференциалом в единице (т.е. соответствующим гомоморфизмом касательных алгебр Ли). *Указание:* воспользуйтесь функториальностью экспоненты.