

Задачи по группам и алгебрам Ли – 2. Диффеоморфизмы, векторные поля и группы Ли.

Зачет по данному листку ставится в случае сдачи 80% пунктов задач без звездочки. Задачи со звездочкой стоят вдвое дороже. Дедлайн 10 октября.

Векторным полем на гладком многообразии M называется дифференцирование алгебры $C^\infty(M)$ гладких функций на многообразии M . *Дифференциальным оператором* на гладком многообразии M называется дифференциальный оператор на алгебре $C^\infty(M)$.

- 1* . а)** Докажите, что всякое векторное поле v на многообразии M в любых локальных координатах x_1, \dots, x_n имеет вид $v(F) = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial F}{\partial x_i}$, где f_i – гладкие функции. *Указание:* достаточно доказать, что всякое векторное поле, действующее нулем на координатные функции x_i , действует нулем на все функции. Для этого воспользуйтесь леммой Адамара: всякая C^∞ -функция F в окрестности точки с координатами $(0, \dots, 0)$ представима в виде $F(x_1, \dots, x_n) = F(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n x_i f_i(x_1, \dots, x_n)$, где f_i – некоторые C^∞ -функции.
- б)** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение о дифференциальных операторах на многообразии.

- 2. а)** Докажите, что векторные поля на многообразии образуют алгебру Ли относительно коммутатора. Эта алгебра Ли обозначается $\text{Lie}(M)$. **б)** Пользуясь утверждением задачи 1а, выпишите в локальных координатах формулу для коммутатора векторных полей.

Диффеоморфизмы многообразия M действуют на алгебре $C^\infty(M)$ и на алгебре Ли $\text{Lie}(M)$. А именно, пусть $g : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм, тогда оператор $g^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ действует по формуле $(g^*F)(m) := F(g(m))$ для всех $F \in C^\infty(M)$, $m \in M$, а оператор $g_* : \text{Lie}(M) \rightarrow \text{Lie}(M)$ действует по формуле $(g_*v)(F) := g^{*-1}v g^*(F)$ для всех $v \in \text{Lie}(M)$, $F \in C^\infty(M)$.

- 3. а)** Докажите, что $(gh)^* = h^*g^*$, а $(gh)_* = g_*h_*$. **б)** Докажите, что g^* – автоморфизм алгебры $C^\infty(M)$, а g_* – автоморфизм алгебры Ли $\text{Lie}(M)$.

- 4.** Пусть $g_t : M \rightarrow M$ – семейство диффеоморфизмов многообразия M , гладко зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$ (это значит, что отображение $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$, переводящее (t, m) в $g_t(m)$, гладко), такое, что $g_0 : M \rightarrow M$ – тождественный диффеоморфизм. **а)** Докажите, что оператор v на алгебре $C^\infty(M)$, действующий по формуле $v(F) := \frac{d}{dt}|_{t=0} g_t^*(F)$ является векторным полем на многообразии M . Такое векторное поле называется *полем скоростей* данного семейства диффеоморфизмов. **б)** Пусть v' – еще одно векторное поле на M . Докажите, что $[v, v'] = -\frac{d}{dt}|_{t=0} g_t v'$. **в)** Пусть g_t^1, g_t^2 – два семейства диффеоморфизмов M , а v^1, v^2 – соответствующие поля скоростей. Докажите, что

$$[v^1, v^2](F) = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \Big|_{t,s=0} g_t^{1*} g_s^{2*} (g_t^{1*})^{-1} (g_s^{2*})^{-1} (F)$$

- 5. а)** Пусть g_t – семейство поворотов евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 с общим центром. Какой вид имеет соответствующее поле скоростей? **б)** Тот же вопрос для семейства параллельных переносов. **в)** Тот же вопрос для семейства гомотетий с общим центром. **г)** Тот же вопрос для семейства линейных преобразований плоскости. **д)** Тот же вопрос для семейства аффинных преобразований плоскости.

- 6. а)** Выберите какую-нибудь координату на проективной прямой, и напишите в ней общий вид поля скоростей семейства дробно-линейных преобразований прямой. **б)** Выберите какие-нибудь координаты на плоскости Лобачевского, и напишите в них общий вид поля скоростей семейства движений плоскости Лобачевского.

Группой Ли называется гладкое многообразие G , наделенное структурой группы так, что отображения умножения $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$ и взятия обратного $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ гладкие.

7. Пусть G – группа Ли, $g \in G$ – произвольный ее элемент. Докажите, что отображения $L_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto gh$ и $R_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto hg$ являются диффеоморфизмами.

8. а) Докажите, что следующие группы являются группами Ли: $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, U_n , SU_n . *Указание:* все эти группы являются подмножествами векторного пространства $Mat_n(\mathbb{R})$ или $Mat_n(\mathbb{C})$ на котором операция умножения билинейна, и, следовательно, гладка. Операция взятия обратного рациональна, и, следовательно, гладка на области определения. Поэтому достаточно проверить, что каждая из этих групп является гладким подмногообразием в $Mat_n(\mathbb{R})$ или $Mat_n(\mathbb{C})$. В свою очередь, последнее условие достаточно проверить в какой-нибудь одной точке нашей группы, поскольку все остальные точки из нее получаются применением диффеоморфизма левого умножения $L_g : Mat_n \rightarrow Mat_n$ для подходящего g из нашей группы. **б)** Найдите размерности этих групп Ли. **в)** Какие из этих групп Ли связны? **г)** Какие из них компактны?

9. Какие из следующих групп являются комплексными (голоморфными) подгруппами Ли в $GL_n(\mathbb{C})$: **а)** U_n ; **б)** $SL_n(\mathbb{C})$; **в)** $O_n(\mathbb{C})$?

10. Приведите пример **а)** группы Ли, диффеоморфной цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$, **б)** 2-мерной неабелевой группы Ли, **в)** неабелевой группы Ли, диффеоморфной \mathbb{R}^3 , **г)** неабелевой группы Ли, диффеоморфной $S^1 \times \mathbb{R}^2$, **д*)** группы Ли, диффеоморфной трехмерной сфере S^3 .

11* . а) Докажите, что все дифференцирования алгебры вещественных $n \times n$ -матриц внутренние. **б)** Тот же вопрос для алгебры кватернионов. **в)** Докажите, что алгебра Ли дифференцирований кватернионов есть трехмерное евклидово пространство с операцией векторного произведения.

12* . а) Укажите какие-нибудь 3 векторных поля на трехмерной сфере S^3 , линейно независимых в каждой точке. **б)** Укажите для каждого из этих векторных полей какое-нибудь семейство диффеоморфизмов, полем скоростей которого оно является. **в)** Найдите попарные коммутаторы этих векторных полей.

13* . а) Опишите все голоморфные векторные поля на $\mathbb{C}P^1$. **б)** Укажите для каждого из этих векторных полей какое-нибудь семейство диффеоморфизмов, полем скоростей которого оно является. **в)** Опишите все голоморфные дифференциальные операторы на $\mathbb{C}P^1$.