Механика и теория поля 2014.

Листок 4. Канонические преобразования. Представление Лакса.

---

1. Докажите, что при канонических преобразованиях, заданных производящей функцией $F(q, Q, t)$ с невырожденной матрицей вторых частных производных $U_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q^j \partial q^i}$,

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q^i}, \quad H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

а) скобки Пуассона не меняются: $\{f, g\}_{(q,p)} = \{f, g\}_{(Q,P)}$;

б) уравнения движения системы не меняют своего вида: $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H'\}$.

2. Рассмотрим гармонический осциллятор с гамильтонианом $H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$. Найдите закон эволюции области фазового пространства, заданной неравенством $(q - a)^2 + p^2 \leq r^2$, где $0 < a < r$ — вещественные параметры. Убедитесь в справедливости теоремы Лиувилля явным вычислением площади этой области в произвольный момент времени.

3. Гамильтониан одномерной механической системы имеет вид $H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$, где q и p — канонические координата и импульс, $U(q)$ — потенциальная энергия системы. Постройте представление Лакса для этой системы.

4. Одномерная незамкнутая цепочка Тоды представляет собой систему n одинаковых точечных частиц на прямой с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m} + g^2 \sum_{i=1}^{n-1} e^{2(q_i - q_{i+1})},$$

где g – константа взаимодействия – может быть без потери общности выбрана равной 1.

а) Постройте представление Лакса для этой системы.

б) Для случая трех частиц ($n = 3$) выпишите интегралы движения системы, и убедитесь в их функциональной независимости.

5. Одномерная замкнутая цепочка Тоды представляет собой систему n одинаковых точечных частиц на окружности с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m} + g^2 \sum_{i=1}^{n} e^{2(q_i - q_{i+1})},$$

где мы полагаем $q_{n+1} \equiv q_1$. Постройте представление Лакса для этой системы.