Механика и теория поля 2014.

Листок 3. Гамильтонов формализм: скобки Пуассона и законы сохранения

---

1. Преобразование Лежандра ι задается на множестве дважды непрерывно дифференцируемых выпуклых функций

$$\iota: \; f(x) \mapsto h(p) = (xp - f(x))|_{x=x(p)},$$

где $x, p \in \mathbb{R}$, и $x(p)$ — результат разрешения условия $f'(x) = p$ относительно x, т.е., $f'(x(p)) \equiv p$. Докажите, что преобразование Лежандра инволютивно: $\iota \circ \iota = id$, и его образ состоит из дважды непрерывно дифференцируемых выпуклых функций.

2. Скобка Пуассона и родственные дифференциально-геометрические конструкции.

а) Билинейная операция на пространстве функций на многообразии в некоторых координатах z^a задается формулой

$$\{f, g\} = \partial_a f J^{ab}(z)\, \partial_b g.$$

Какие условия требуется наложить на матрицу $J^{ab}(z)$, чтобы операция $\{*, *\}$ была скобкой Пуассона? Как преобразуется J^{ab} при замене координат? $J^{ab}(z)$ назывется *структурной матрицей* скобки Пуассона.

б) Сопоставим функции $h(z)$ векторное поле X_h, действующее по правилу $X_h(f) := \{f, h\}$. Такое векторное поле называется *гамильтоновым.* В координатах z^a представляется в виде $X_h = J^{ab}(z)\partial_b h\, \partial_a$. Докажите соотношение, устанавливающее связь между скобкой Пуассона функций и алгеброй Ли (коммутатором) соответствующих гамильтоновых векторных полей:

$$[X_f, X_g] \, = \, X_{\{f,g\}}.$$

в) Рассмотрим скобку Пуассона с невырожденной структурной матрицей $J^{ab}(z)$. Обозначим $w(z) = (J(z))^{-1}$. Убедитесь, что формула $\Omega = w_{ab}(z) dz^a \wedge dz^b$ задает невырожденную замкнутую 2-форму, которая действует на гамильтоновых векторных полях по правилу

$$\Omega\,(X_f, X_g) \, = \, \{g, f\}.$$

Такая 2-форма называется *симплектической структурой*, а многообразие, на котором она задана, — *симплектическим многообразием.*

3. Пусть $\vec{r}$ и $\vec{p}$ — радиус-вектор и импульс материальной точки, декартовы координаты которых имеют канонические скобки Пуассона

$$\{r_i, r_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{r_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Рассмотрим вектор момента импульса точки $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ и векторную функцию на фазовом пространстве вида

$$\vec{f} = \vec{r}\,\phi_1 + \vec{p}\,\phi_2 + \vec{M}\phi_3,$$

где ϕ_a, $a = 1, 2, 3$ — произвольные скалярные функции. Найдите значение скобки Пуассона $\left\{(\vec{a}, \vec{M}),\, (\vec{b}, \vec{f})\right\}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные постоянные векторы.

4. Материальная точка массы m движется в центрально-симметричном потенциале

$$U(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad r = |\vec{r}|.$$

а) Докажите, что вектор

$$\vec{K} = \frac{1}{m}(\vec{p} \times \vec{M}) - \frac{\alpha\,\vec{r}}{r},$$

называемый вектором Рунге-Ленца, является интегралом движения. Здесь $\vec{M}$ и $\vec{p}$ — момент импульса и импульс материальной точки, соответственно.

б) Вычислите скобки Пуассона $\{K_i, K_j\}$ и $\{K_i, M_j\}$.

5. Гамильтониан равномерно намагниченного шара в однородном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$ имеет вид

$$H = \frac{(\vec{M}, \vec{M})}{2I} - \gamma(\vec{M}, \vec{\mathcal{H}}),$$

где $\vec{M}$ — вектор момента импульса шара, I — его момент инерции, а константа взаимодействия γ носит название гиромагнитного отношения. Скобки Пуассона декартовых компонент момента импульса имеют вид $\{M_i, M_j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} M_k$, где ϵ_{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, $\epsilon_{123} = 1$.

Выведите уравнения движения для компонент момента импульса и найдите их явное решение для случая $\vec{\mathcal{H}} = (0, 0, \mathcal{H}_0)$.

6. Рассмотрим внимательней скобку Пуассона, задаваемую формулой

$$\{x_i, x_j\} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_k, \qquad (*)$$

где $\{x_i\}_{i\in 1,2,3}$ – координаты в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Структурная матрица этой скобки Пуассона вырождена, а значит, существуют функции $Z^\alpha(x)$, такие что $\{Z^\alpha, f\} = 0, \ \ \forall f$. Эти функции называются центральными в алгебре скобок Пуассона. Условия $Z^\alpha(x) = c^\alpha$ расслаивают фазовое пространство на, так называемые, *симплектические листы* (здесь c^α – константы, нумерующие различные симплектические листы). Гамильтоновы поля, задаваемые скобкой Пуассона касательны к поверхностям ее сиплектических листов. Если же ограничить скобку Пуассона на симплектический лист, то она становится невырожденной.

Симплектическими листами пуассоновой структуры (*) являются концентрические сферы в пространстве $\mathbb{R}^3$.

а) Найдите невырожденную скобку Пуассона, порождаемую ограничением скобки $(*)$ на сферу радиуса r. Определите соответствующую симплектическую 2-форму.

б) Рассмотрим стереографическую проекцию сферы из северного полюса на плоскость, касающуюся сферы в южном полюсе:

$$(\theta, \phi) \in S^2 \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad e^{i\phi}\,\mathrm{ctg}(\theta/2) \mapsto x + iy.$$

Найдите симплектическую структуру на касательной плоскости, в которую переходит симплектическая структура на сфере, найденная в предыдущем пункте. Определите соответствующие скобки Пуассона.

в) Найдите уравнения движения на плоскости с пуассоновой структурой, найденной в предыдущем пункте, которые отвечают гамильтониану

$$H = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$