1. Прикладные методы анализа. Магистерский курс. Листок 2. Асимптотические методы II

Обязательные задачи: 2, 4,5;6 или 7;8 или 9. Срок сдачи - 22 октября.

1. а) Покажите, что на интервале (0,1) четный полином Бернулли $B_{2n}(x)$ имеет лишь одну критическую точку (минимум) $x=1/2$ и равные значения на его концах;
   б) Покажите, что $B_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)B_n$.

2. Выведите асимптотическое разложение Эйлера:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\sim\log N+\gamma-\frac{1}{2N}-\sum_{k\geq 1}\frac{B_{2k}}{2kN^{2k}},\qquad N\to\infty.$$

Здесь B_n – числа Бернулли, $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)$ – постоянная Эйлера.

3. Покажите, что $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\dfrac{2}{3}n^{3/2}+\dfrac{1}{2}n^{1/2}+C+\dfrac{1}{24n^{1/2}}+O\left(\dfrac{1}{n^{5/2}}\right)$, где C - некоторая постоянная. Дайте определение этой постоянной и ее приблизительную оценку.

4. а) Покажите, что $\int_0^{\pi/2}\sin^n t dt=\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)^{1/2}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right)$ при $n\to\infty$.

   б) Выведите отсюда формулу Валлиса $\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$.

5. Найдите (главную) асмптотику интегралов при $\lambda\to+\infty$:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x^2)e^{\lambda(2x^3-3x^2)}dx$, б) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x^2)e^{i\lambda(2x^3-3x^2)}dx$, в) $\displaystyle\iint_{|x|\leq 1,|y|\leq 1}(1+2x)e^{i\lambda(x^2-8xy+y^2+1)}dxdy$.

Какой вид имеет остаточный член?

6. Найдите (главную) асимптотику

   а) функции Макдональда $K_\nu(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(\nu t-z\operatorname{ch}t)dt$, $\nu\in\mathbb{R}$ при $\operatorname{Re}z\to\infty$.

   б) функции Бесселя $J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\varphi-n\varphi)d\varphi$ при больших положительных x.

7. Найдите асимптотику при $\lambda\to\pm\infty$ сходящегося интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{i\lambda f(x)}dx$, если $g(0)\neq 0$, $f'(x)\neq 0$ при $x\neq 0$ и $f'(0)=\ldots=f^{(2n)}(0)=0$, $f^{(2n+1)}\neq 0$,

8. а) Найдите главный член асимптотики функции Эйри $\mathrm{Ai(x)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\mathrm{i}\left(\mathrm{t}^3/3+\mathrm{xt}\right)\right\}\mathrm{dt}$ при $x\to-\infty$.

   б) Найдите асимптотику интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\left(t^3/3+xt\right)\right\}\dfrac{t^2dt}{1+t^2}$. при $x\to+\infty$.

9. Функция Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$, $\nu\in\mathbb{C}$ может быть представлена интегралом

$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_C e^{ix\sin w-i\nu w}dw,$$

где контур C проходит в полосе $0<\operatorname{Re}w<\pi$, асимптотически приближаясь в начальной своей части к лучу $\operatorname{Re}w=0$, $\operatorname{Im}w\to+\infty$ и в конечной своей части к лучу $\operatorname{Re}w=\pi$, $\operatorname{Im}w\to-\infty$. Покажите, что

   а) $H_\nu^{(1)}(x)=\left(\dfrac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left(\exp i\left(x-\dfrac{\pi}{4}(2\nu+1)\right)+O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right),\qquad x\to+\infty$

   б) Опишите перевальный контур. Под каким углом он пересекает ось абсцисс?

   в) В каком секторе комплексного z верна эта асимптотика для функции $H_\nu^{(1)}(z)$?