

1. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА. ЛИСТОК 3. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Обязательные задачи: 1а-в,2,3,4,5,6а,9. Срок сдачи - 23 октября.

1. Покажите, что следующие функции стремятся к  $\delta(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

а)  $\frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ , где  $\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$  – характеристическая функция интервала  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ;

б)  $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ ;    в)  $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/4\varepsilon}$ ;    г)  $\frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ .

2. Вычислите следующие обобщенные функции как функционалы на основных:

а)  $(|x+1| + |x-1|)''$ ;    б)  $[x]$ ;    в)  $x^k \delta^{(l)}(x)$ , где  $k = 0, 1, 2$ ,  $l \geq 0$ ;    г)  $\left(\frac{1}{x}\right)'$ .

Здесь  $[x]$  – целая часть  $x$  – наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ , а  $1/x$  понимается в смысле главного значения.

3. Покажите, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(x-k)$  сходится в  $\mathcal{D}'$  для любых  $a_k \in \mathbb{C}$

4. а) Опишите все решения уравнения  $y'(x) = 0$  в обобщенных функциях.

б) Опишите все решения уравнения  $xy(x) = 0$  в обобщенных функциях.

5. Покажите, что функция  $\ln|x|$  локально интегрируема на вещественной прямой. Найдите ее производную в классе обобщенных функций.

6. Покажите, что обобщенная функция  $\delta(x)$  не может быть представлена никакой локально интегрируемой на прямой функцией.

7. Обобщенная функция  $1/x^3$  определена соотношением

$$\frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2} \right),$$

где  $1/x^2$  также обобщенная функция (см. задачу 2г). Найдите явное выражение для действия  $1/x^3$  на основную функцию.