Задачи 5. Функциональные детерминанты

Функциональные детерминанты I

Для дифференциального оператора Λ с положительными собственными значениями λ_n определим ζ-функцию

$$\zeta_\Lambda(s) = \operatorname{tr} \Lambda^{-s} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^s}$$

и след теплового ядра

$$K_\Lambda(t) = \operatorname{tr} e^{-\Lambda t} = \sum_n e^{-\lambda_n t}$$

Детерминант оператора Λ определяется как $\det \Lambda = e^{-\zeta'_\Lambda(0)}$ где ζ-функция в окрестности $s = 0$ понимается в смысле аналитического продолжения.

1. Докажите, что ζ-функция и след теплового ядра связаны формулой
$$\zeta_\Lambda(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} K_\Lambda(t)\, dt$$
Можно ли обратить эту формулу, т.е. выразить $K_\Lambda(t)$ через $\zeta_\Lambda(s)$?

2. Пусть Λ, Λ_0 - два дифференциальных оператора. Докажите тождество
$$\frac{\det \Lambda}{\det \Lambda_0} = \exp\left\{ -\int_0^\infty \frac{dt}{t}\Big(K_\Lambda(t) - K_{\Lambda_0}(t)\Big)\right\}$$
(начните с тождества $\log \frac{A}{B} = -\int_0^\infty \frac{dt}{t}(e^{-tA} - e^{-tB})$).

Рассмотрим задачу на собственные значения оператора $\hat{H} = -\dfrac{d^2}{dx^2} + m^2$, $x \in [0, L]$ с граничными условиями следующих трех типов:

а) $\psi(0) = \psi(L) = 0$ (Дирихле)

б) $\psi'(0) = \psi'(L) = 0$ (Нейман)

в) $\psi(0) = \psi(L)$ (периодические)

3. Найдите $\zeta_{\hat{H}}(s)$ и $K_{\hat{H}}(t)$ для всех трех типов граничных условий. Найдите разложение $K_{\hat{H}}(t)$ при $t \to 0_+$.

4. Введя обрезание (регуляризацию), вычислите $\det\Big(-\dfrac{d^2}{dx^2} + m^2\Big)$.

5. Для операторов с граничным условием Дирихле докажите формулу
$$\frac{\det\Big(-\frac{d^2}{dx^2} + m^2\Big)}{\det\Big(-\frac{d^2}{dx^2}\Big)} = \frac{\sinh(mL)}{mL}$$

6. * (“Одномерный эффект Казимира”.) Найдите силу, с которой притягиваются друг к другу концы отрезка $[0, L]$ из-за нулевых колебаний безмассового бозонного поля с условием Дирихле на концах. Энергию нулевых колебаний считать равной $E = \frac{\hbar}{2} \operatorname{tr} \hat{\Omega}$, где собственные значения оператора $\hat{\Omega}$ равны $\omega_n = \dfrac{\pi n}{L}$. (Как известно из курса общей физики, сила равна $F = -\frac{\partial E}{\partial L}$.)