

Задачи 4. Функции Грина

Двумерные операторы Лапласа и Дирака

Функцией Грина оператора Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}$ на плоскости называется функция $G(z, \zeta) = G(\zeta, z)$ такая, что $\Delta_z G(z, \zeta) = 2\pi\delta^{(2)}(z - \zeta)$. Формально $\frac{1}{2\pi}G(z, \zeta)$ – это ядро интегрального оператора Δ^{-1} , обратного к оператору Лапласа.

Безмассовое уравнение Дирака на евклидовой плоскости $(\sigma_1\partial_x + \sigma_2\partial_y)\vec{\psi} = 0$ в комплексных координатах $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ расщепляется на два независимых уравнения для компонент вектора $\vec{\psi}$: $\partial_{\bar{z}}\psi_1 = 0$, $\partial_z\psi_2 = 0$. Аналогично случаю оператора Лапласа можно ввести функцию Грина как ядро оператора $\bar{\partial}^{-1}$.

1. Докажите, что $\partial_{\bar{z}}\frac{1}{z - \zeta} = \pi\delta^{(2)}(z - \zeta)$, и тем самым функция $\frac{1}{\pi(z - \zeta)}$ является функцией Грина для оператора Дирака (в голоморфных координатах).
2. Пользуясь результатом предыдущей задачи, проверьте, что $\log|z - \zeta|$ является функцией Грина оператора Лапласа.

Граничная задача Дирихле для оператора Лапласа

Пусть D – односвязная область в комплексной плоскости. Задача Дирихле состоит в отыскании функции Φ , гармонической в области D и такой, что Φ равна заданной функции f на границе области. Функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D (далее просто функция Грина) называется функция $G(z, \zeta) = G(\zeta, z)$ в $D \times D$ такая, что: а) $\Delta_z G(z, \zeta) = 2\pi\delta^{(2)}(z - \zeta)$; б) $G(z, \xi) = 0$ при любых $z \in D$ и $\xi \in \partial D$.

1. Докажите, что $G(z, \zeta) = \log|z - \zeta| + O(1)$ при $z \rightarrow \zeta$.
2. Найдите функцию Грина, если D – а) верхняя полуплоскость, б) круг радиуса R с центром в 0 .
3. Докажите, что функция Грина единственна и дается формулой

$$G(z, \zeta) = \log \left| \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w(z)}w(\zeta)} \right|,$$

где $w(z)$ – взаимно однозначное конформное отображение области D на единичный круг, существующее в силу теоремы Римана.

4. Решите уравнение Лапласа $(\partial_x^2 + \partial_y^2)\Phi = 0$ в верхней полуплоскости $y \geq 0$ с граничным условием $\Phi(x, 0) = 1$ при $|x| \leq 1$ и 0 при $|x| \geq 1$.
- 5.* Проверьте, что функция Грина дает решение граничной задачи Дирихле в области D с помощью формулы

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} f(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(z, \xi) |d\xi|,$$

где как обычно $z = x + iy$ и $\partial/\partial n_\xi$ – нормальная производная по второму аргументу (единичный нормальный вектор считается направленным во внешность области). Подумайте, как можно было бы сформулировать аналог задачи Дирихле для оператора Дирака.