1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

5 Двумерные теории бозонов и фермионов

5.1 Действие свободных бозонов с источником

В теории на двумерном мировом листе мы можем рассмотреть аналогичную одномерной задачу - о вычислении гауссова интеграла, которая является простейшей из задач, поставленной теорией струн. Пользуясь репараметризационной инвариантностью, выберем сначала метрику в конформном виде $ds^2 = e^{\varphi(\sigma_1,\sigma_2)}(d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2) = e^{\varphi(z,\bar{z})}dzd\bar{z}$ и решим классическую задачу с источником для действия одного свободного безмассового скалярного поля

$$\begin{gathered} S[X|J] = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2z\partial_\alpha X\partial_\alpha X - \int_\Sigma d^2zJX \\ \Delta X(z,\bar{z}) = -J(z,\bar{z}) \end{gathered} \tag{5.1}$$

где $\alpha = 1,2$. Это банальным образом повторяет конечномерное и (функционально-) одномерное рассуждение

$$\begin{aligned} S[X_{\rm cl}|J] &= \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2z\partial_\alpha X_{\rm cl}\partial_\alpha X_{\rm cl} - \int_\Sigma d^2zJX_{\rm cl} = \\ = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2zX_{\rm cl}(-\Delta)X_{\rm cl} &- \int_\Sigma d^2zJX_{\rm cl} = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2zJX_{\rm cl} = \\ &= \tfrac{1}{2}\int d^2zd^2wJ(z)G(z,w)J(w) \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $X_{\rm cl}(z) = -\int d^2wG(z,w)J(w)$ решение уравнения в (5.1), в котором использована функция Грина (действующего на функциях) двумерного оператора Лапласа $\Delta = \partial_1^2+\partial_2^2 = 4\bar{\partial}\partial$

$$\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w) \tag{5.3}$$

Тогда, как и в случае частицы

$$\langle X(z)X(z')\rangle = G(z,z') \tag{5.4}$$

Простейшая физическая интерпретация данной задачи - двумерная теория потенциала, например в электростатике, где можно считать $J = J(z,\bar{z})$ плотностью заряда, $X_{\rm cl}(z) = -\int d^2w G(z,w)J(w)$ - создаваемым им электростатическим потенциалом, а выражение $S_{\rm cl} = \frac{1}{2}\int d^2z d^2w J(z)G(z,w)J(w)$ - электростатической энергией.

Какие существуют решения у уравнения (5.3)?

- Локальное (или на всей комплексной плоскости $\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w) - \delta^{(2)}(z-\infty)$)
$$G(z,w) = \frac{1}{2\pi}\log|z-w| \tag{5.5}$$
- Решение задач Дирихле (и Неймана) в области, например на полуплоскости или в единичном круге.
- Решение с периодическими граничными условиями - на цилиндре или на торе.

5.2 Корреляционные функции кулоновского газа

Решение на плоскости (5.3) легко обобщается на случай нескольких точечных источников на сфере (компактифицированной плоскости) с зарядами $\{P_j\}$, $j = 1,\ldots,N$, удовлетворяющими $\sum_j P_j = 0$. Это дает действие

$$\begin{aligned}
S[X_{\rm cl}|P] = \frac{1}{4\pi}\int d^2z d^2w J(z)\log|z-w|J(w)\Big|_{J(z)=i\sum_j P_j\delta^{(2)}(z-z_j)} = \\
= -\frac{1}{4\pi}\sum_{j,k} P_j\cdot P_k\log|z_j-z_k| = \\
= -\frac{1}{4\pi}\sum_j P_j^2\log\epsilon_j - \frac{1}{2\pi}\sum_{j<k} P_j\cdot P_k\log|z_j-z_k|
\end{aligned} \tag{5.6}$$

или, восстанавливая размерное натяжение струны $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ (до этого мы считали, что $\alpha' = \frac{1}{2\pi}$),

$$\exp(-S[X_{\rm cl}|P;\{z_j\}]) = \prod_j \epsilon_j^{\alpha' P_j^2/2}\prod_{j<k}|z_j-z_k|^{\alpha' P_j\cdot P_k} \tag{5.7}$$

Вспоминая наши рассуждения про гауссовы интегралы мы понимаем, что на самом деле вычисляли следующую *корреляционную функцию*

$$\langle\prod_j V_{\alpha_j}(z_j)\rangle_X = \frac{\int DX\ e^{-S}\prod_j V_{\alpha_j}(z_j)}{\int DX\ e^{-S}} = \prod_{j<k}|z_j-z_k|^{\alpha_j\cdot\alpha_k} \tag{5.8}$$

в теории свободного скалярного безмассового поля с действием

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2 z \; \partial_\alpha X \partial_\alpha X \tag{5.9}$$

для экспоненциальных *вершинных операторов*

$$V_{\alpha_j}(z_j) = \epsilon_j^{-\alpha_j^2} \exp\left(iP_j X(z_j)\right), \qquad \alpha_j = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} P_j \tag{5.10}$$

где нам часто, в зависимости от конкретного случая, будет удобно фиксировать квадрат струнной длины α' какой-нибудь константой. Несколько замечаний:

- Удобно считать P_j имеющими размерность импульса, а α_j - "обезразмеренными" (кулоновскими) зарядами. Операторы

  $$\exp\left(iPX(z)\right) = \int dx e^{iPx} \delta(x - X(z)) \tag{5.11}$$

  являются двойственными по Фурье к операторам фиксирующим координаты струны в физическом пространстве-времени.

- Поскольку "нулевая мода" - константа $X(z, \bar{z}) = X_0$ выпадает из квадратичного действия (5.9), можно считать, что интеграл по ней в (5.8)

  $$\int dX_0 \prod_j \exp\left(iP_j X_0\right) = 2\pi\delta\left(\sum_j P_j\right) \tag{5.12}$$

  дает δ-функцию, т.е. закон сохранения полного импульса-заряда.

- Сингулярный размерный множитель в определении (5.10) нужен в частности для того, чтобы левая и правая часть равенства одинаковым образом преобразовывалась при масштабных (и конформных!) преобразованиях *мирового листа* [1]. Действительно, при $z \to \lambda z$, $z_j \to \lambda z_j$ действие инвариантно, если считать, что $X(z) \to X(\lambda z)$, $P_j \to P_j$. Однако,

  $$\begin{gathered} \prod_{j<k} |z_j - z_k|^{2\alpha_j \cdot \alpha_k} \to |\lambda|^{2\sum_{j<k} \alpha_j \alpha_k} \prod_{j<k} |z_j - z_k|^{2\alpha_j \cdot \alpha_k} \\ \lambda^{2\sum_{j<k} \alpha_j \alpha_k} \underset{\sum_j \alpha_j = 0}{=} \lambda^{-\sum_j \alpha_j^2} \end{gathered} \tag{5.13}$$

  и наличие *размерного* множителя $\epsilon_j^{-\alpha_j^2} \to \lambda^{-\alpha_j^2} \epsilon_j^{-\alpha_j^2}$ в определении (5.10) восстанавливает равенство (5.8) после масштабного преобразования.

[1] Легко проверить это утверждение, например, для дробно-линейных преобразований Мёбиуса $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, отвечающих глобально определенным конформным преобразованиям сферы.

5.3 Перенормировка и аномальная размерность

Вспомним, что мы уже встречались с этим явлением, когда обсуждали вычисление пропагатора частицы:

- Между величинами в классической и квантовой теории может существовать нетривиальная связь. Наивно введенные параметры из классической задачи иногда приходится доопределять *сингулярным* образом, чтобы ответ в квантовой задаче имел разумный физический смысл. В данном случае это множитель $\epsilon_j^{-\alpha_j^2/2}$ ("контрчлен") в определении вершинного оператора, который сам по себе плохо определен при снятии регуляризации $\epsilon_j \to 0$, однако только *перенормированная* на произведение таких факторов корреляционная функция имеет конечную величину и разумный физический смысл.

- Квантовой доопределение приводит к важнейшим физическим следствиям.

Мы пока обсудили лишь одно из них - масштабную (или конформную - относительно масштабных или конформных преобразований на мировом листе) размерность, которая у классического скалярного поля $X(z)$ - координаты струны - равна нулю, так как $\tilde{X}(\tilde{z}) = X(z)$. Вообще говоря, в классической теории размерности "операторов" могут быть только целыми (у фермионов - полуцелыми из-за их неоднозначности), если эти размерности определить как

$$\tilde{O}(\tilde{z}) = \lambda^{-\Delta} O(z), \qquad \tilde{z} = \lambda z \tag{5.14}$$

для собственных функций оператора растяжения. При этом классические размерности в теории скалярного поля очевидно равны количеству производных

$$\begin{gathered} O_0(z) = f(X(z)), \qquad \Delta = 0 \\ O_1(z) = \partial X f(X(z)) + \bar{\partial} X g(X(z)), \qquad \Delta = 1 \end{gathered} \tag{5.15}$$

и т.д. для любых функций скалярного поля $X(z)$, не содержащей его производных.

Формула (5.8) однако означает, что в квантовой теории экспонента $e^{iPX(z)}$ приобретает *аномальную* размерность $\frac{1}{2}\alpha' P^2 = \alpha^2 = 2\Delta$, т.е. результат для коррелятора соответствующим образом нетривиально преобразуется при масштабных преобразованиях. Это означает, например, что в квантовой теории замкнутых струн независящий от выбора координат оператор $\int_\Sigma d^2z\ e^{iPX(z)}$ может существовать лишь при $P^2 = 4/\alpha'$, или в случае многомерного пространства Минковского

$$-P^2 = -P_\mu P^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = -\frac{4}{\alpha'} \tag{5.16}$$

только для тахиона.

5.4 Двухточечные функции

Рассмотрим подробнее простейший случай коррелятора экспоненциальных полей (5.8) - двухточечный, так как одноточка $\langle e^{i\alpha X(z)}\rangle \sim \delta(\alpha)$ равна нулю при $\alpha \neq 0$. В случае двухточки закон сохранения заряда оставляет единственный ненулевой вариант

$$\langle V_\alpha(z)V_{-\alpha}(z')\rangle = \langle e^{i\alpha X(z)}e^{-i\alpha X(z')}\rangle = \frac{1}{|z-z'|^{2\alpha^2}} = \frac{1}{|z-z'|^{4\Delta_\alpha}} \tag{5.17}$$

где $\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2$ - аномальная размерность (как оператора V_α, так и оператора $V_{-\alpha}$). Общий вопрос о спектре допустимых операторов в теории, т.е. множестве $\mathcal{A}$ допустимых значений $\alpha \in \mathcal{A}$ чрезвычайно важный, и не самый простой - мы вернемся к нему позже. В данный момент заметим лишь, что выражение (5.17) допускает голоморфную факторизацию

$$\langle V_\alpha(z)V_{-\alpha}(z')\rangle = \frac{1}{|z-z'|^{4\Delta_\alpha}} = \frac{1}{(z-z')^{2\Delta_\alpha}}\frac{1}{(\bar{z}-\bar{z}')^{2\Delta_\alpha}} \tag{5.18}$$

после которой в случае общего положения каждый из сомножителей перестает вообще говоря быть однозначной функцией (или приобретает нетривиальную монодромию при обходе $z \circlearrowleft z'$). Это не так, однако, при $2\Delta_\alpha = k \in \mathbb{Z}$, т.е. (для убывающих корреляционных функций) для

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}P_k = \sqrt{k}, \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{5.19}$$

В этом случае можно пытаться придать смысл, например, коррелятору голоморфных частей операторов $J_\pm(z) = V_{\pm\sqrt{2}}(z)$ (размерностей $\Delta = 1$)

$$\langle J_+(z)J_-(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^2} \tag{5.20}$$

который окадывается “очень похожим” на коррелятор двух голоморфных токов - производных скалярного поля $J(z) = i\partial X(z)$

$$\langle J(z)J(z')\rangle = -\alpha'\partial_z\partial_{z'}\log|z-z'| = \frac{\alpha'/2}{(z-z')^2} \underset{\alpha'=2}{=} \frac{1}{(z-z')^2} \tag{5.21}$$

у которых - наоборот - вся размерность $\Delta = 1$ классическая, а аномальная равна нулю.

Наконец, в случае $\alpha = \pm 1$ голоморфные и антиголоморфные части тоже могут быть определены сами по себе, например

$$\langle V_+(z)V_-(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} \tag{5.22}$$

и отвечают коррелятору некоторых операторов размерности $\Delta = \frac{1}{2}$ с полюсом первого порядка.

5.5 Корреляторы двумерных фермионов

Вспомним действие Вейля для двумерных безмассовых комплексных фермионов

$$S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\ \tilde{\psi}\bar{\partial}\psi \quad (\ +c.c.) \tag{5.23}$$

где $\tilde{\psi}$ и ψ - комплексные фермионы, или различные грассмановы функции (1/2-дифференциалы) на мировом листе, голоморфные на уравнениях движения [2]

$$\bar{\partial}\psi = 0, \quad \bar{\partial}\tilde{\psi} = 0 \tag{5.24}$$

и для которых рассуждение с гауссовым интегралом приводит к двухточечной корреляционной функции

$$\langle\tilde{\psi}(z)\psi(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} \tag{5.25}$$

являющейся следствием формулы Коши

$$\bar{\partial}\frac{1}{z-z'} = \pi\delta^{(2)}(z-z') \tag{5.26}$$

Что можно сказать про эту систему более подробно:

- Из инвариантности действия (5.23) следует, что размерности $\Delta_\psi = \Delta_{\tilde{\psi}} = \frac{1}{2}$, и это размерности классические. Более того, удобно ввести отдельно размерности $(\Delta, \bar{\Delta})$ относительно независимых растяжений z и $\bar{z}$, и тогда размерности фермионов $(\Delta, \bar{\Delta}) = (\frac{1}{2}, 0)$, или говорят, что они являются 1/2-дифференциалами. Действительно, действие (5.23) (как и бозонное действие (5.9)) инвариантно относительно произвольных независимых голоморфных замен координат

  $$\tilde{z} = f(z), \quad \tilde{\bar{z}} = \tilde{f}(\bar{z}), \quad (z,\bar{z}) \in \mathbb{C}^2 \tag{5.27}$$

  при условии, что $\psi(z)dz^{1/2} = \psi(\tilde{z})d\tilde{z}^{1/2}$, $\tilde{\psi}(z)dz^{1/2} = \tilde{\psi}(\tilde{z})d\tilde{z}^{1/2}$.

- Корреляционная функция (5.25) совпадает с корреляционной функцией (5.22), а именно

  $$\langle\tilde{\psi}(z)\psi(z')\rangle_\Psi = \langle V_+(z)V_-(z')\rangle_X = \langle e^{iX(z)}e^{-iX(z')}\rangle_X \tag{5.28}$$

  при отождествлении фермионов с "голоморфными частями" скалярных полей

  $$\tilde{\psi}(z) \leftrightarrow e^{iX(z)}, \qquad \psi(z) \leftrightarrow e^{-iX(z)} \tag{5.29}$$

  составных операторов в квантовой теории, так что ненулевая классическая размерность фермионов набирается из аномальной размерности, т.е. за счет квантовых эффектов.

[2] Для "анти-голоморфной части" действия все утверждения получаются формальным комплексным сопряжением.