Задачи. 2

Точечная релятивистская частица

1. Найдите нерелятивистский предел действия для свободной точечной частицы в пространстве Минковского:

$$\text{а)}\quad S = -mc\int ds = -mc\int \sqrt{-dX^\mu dX^\mu},$$

$$\text{б)}\quad S = \tfrac{1}{2}\int d\tau e\left(e^{-2}\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau} - m^2c^2\right)$$

2. Рассмотрим действие точечной релятивистской частицы в произвольной пространственно-временной метрике $G_{\mu\nu}(X)$:

$$S_G = \tfrac{1}{2}\int d\tau e\left(e^{-2}G_{\mu\nu}(X)\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial X^\nu}{\partial\tau} - m^2c^2\right)$$

   Выведите уравнения движения и покажите, что они эквивалентны уравнениям геодезической.

Суперсимметрия

1. Рассмотрим "фермионный осциллятор" с гамильтонианом $H = \omega c^\dagger c$, где ферми-операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям $cc^\dagger + c^\dagger c = 1$, $c^2 = (c^\dagger)^2 = 0$. Реализуйте их матрицами в n-мерном пространстве (чему может быть равно n?) и найдите уровни энергии.

2. Суперсимметричный осциллятор задается гамильтонианом $H = \omega a^\dagger a + \omega c^\dagger c$, где $a, a^\dagger$ – бозонные операторы ($[a, a^\dagger] = 1$), а $c, c^\dagger$ – фермионные, как в предыдущей задаче.

   а) Найдите уровни энергии.

   б) Постройте операторы $Q, Q^\dagger$ такие, что $[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0$, $[Q, Q^\dagger]_+ = H$.

Интегралы с грассмановыми переменными

Интегралы по грассмановым переменным определяются равенствами $\int d\xi = 0$, $\int d\xi\,\xi = 1$.

1. Докажите тождества (f – произвольная функция):

   а) $\int d\xi d\bar\xi f(\xi+\eta, \bar\xi+\bar\eta) = \int d\xi d\bar\xi f(\xi, \bar\xi)$.

   б) $\int d\xi_n \dots d\xi_1 \prod_{j=1}^{n}(\xi_j - \zeta_j) f(\xi_1, \dots, \xi_n) = f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$.

2. Докажите следующие формулы для гауссовых интегралов по грассмановым переменным:

   а) $\int d\bar{\xi} d\xi e^{\bar{\xi}A\xi+\bar{\xi}\eta+\bar{\eta}\xi} = -Ae^{-\bar{\eta}A^{-1}\eta}$,

   б) $$\int d\bar{\xi}_1 \dots d\bar{\xi}_n \, d\xi_n \dots d\xi_1 \, \exp\left(\sum_{j,k=1}^{n} \bar{\xi}_j A_{jk} \xi_k + \sum_{j=1}^{n} (\bar{\xi}_j \zeta_j + \bar{\zeta}_j \xi_j)\right)$$
   $$= (-1)^n \det A \exp\left(\sum_{j,k=1}^{n} \bar{\zeta}_j (A^{-1})_{jk} \zeta_k\right),$$

   в) $$\int d\xi_1 \dots d\xi_n \exp\left(\sum_{j,k=1}^{n} \xi_j A_{jk} \xi_k\right) = \sqrt{\det A}.$$