1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

4.1 Гауссовы интегралы

- Начнем с интеграла
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \tag{4.1}$$
Указание: вычислить квадрат интеграла $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} dxdy e^{-(x^2+y^2)}$.

- С помощью замены переменной вычисляем
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{4.2}$$
В дальнейшем нам будет часто удобно изменить меру и писать
$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \tag{4.3}$$

- Тривиально многомерное обобщение
$$I(a_1, \ldots, a_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i x_i^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \wedge_{j=1}^n \frac{dx_j}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i x_i^2} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i} \tag{4.4}$$
с помощью которого легко понять формулу
$$I(A) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \tag{4.5}$$
где под знаком детерминанта в общем случае следует понимать симметричную часть матрицы A: $A_{ij} = A_{ji}$.

- Точно так же в грассмановом случае
$$I(A) = \int d^n\theta\; e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}\theta_i\theta_j} = \pm\sqrt{\det A} = \pm \mathrm{Pf}(A) \tag{4.6}$$
где теперь последнем случае существенно, что матрицу A можно считать антисимметричной $A_{ij} = -A_{ji}$.

Вычислим теперь

$$I(a|b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx} = \frac{e^{b^2/2a}}{\sqrt{a}} \tag{4.7}$$

и его очевидное обобщение

$$\begin{aligned} I(A|\mathbf{b}) &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\ e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j + \sum_i b_ix_i} = \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_iA^{-1}_{ij}b_j}}{\sqrt{\det A}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Замечания:

1. Пусть квадратичное “действие” $S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j - \sum_i b_ix_i$. Найдем условие его экстремума

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = \sum_j A_{kj}x_j - b_k = 0, \quad k = 1, \dots, n \tag{4.9}$$

с решением $X_i = \sum_j A^{-1}_{ij}b_j$. На решении $S(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_iA^{-1}_{ij}b_j$, т.е.

$$\frac{I(A|\mathbf{b})}{I(A|0)} = \exp(-\left. S(\mathbf{x})\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}) \tag{4.10}$$

где правая часть определяется минимальным значением действия - основным вкладом в интеграл.

2. Легко определить (и вычислить!) “корреляторы”

$$\begin{aligned} \langle x_{i_1}\dots x_{i_k}\rangle &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\ x_{i_1}\dots x_{i_k} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j}}{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\ e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j}} = \\ = \frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\dots\partial b_{i_k}} \left.\frac{I(A|\mathbf{b})}{I(A|0)}\right|_{\mathbf{b}=0} &= \frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\dots\partial b_{i_k}} \left. e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_iA^{-1}_{ij}b_j}\right|_{\mathbf{b}=0} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Из правой части (4.11) видно, что любые корреляторы в гауссовой модели выражаются через парные: теорема Вика.

В частности, из (4.11) следует

$$\begin{aligned} \langle x_i\rangle &= 0 \\ \langle x_ix_j\rangle &= A^{-1}_{ij} \end{aligned} \tag{4.12}$$

что нормированная двухточечная функция равна ядру обратного оператора. При этом мы использовали неявно, что:

- У матрицы A_{ij} все собственные значения положительны, в частности нет нетривиальных решений уравнения $\sum_j A_{ij}x_j = 0$ и существует A^{-1}. А что делать если $a_j < 0$ или $a_j = 0$?

- Ясно только, что надо разбить пространство J, $j \in J$ на $J = J_0 \oplus J_\perp$, и искать обратный оператор на $J_\perp$.

4.2 Одномерный случай - частица

Вспомним случай, который мы уже разбирали - интегралы по траекториям

$$\begin{gathered} I(T|X_1, X_0) = \int_{X(0)=X_0, X(1)\ =X_1} DXe^{-\int_0^T dt\frac{\dot{X}^2}{2}} = e^{-\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}} I(T) \\ I(T) = \int_{X(0)=X(1)=0} DXe^{-\int_0^T dt\frac{\dot{X}^2}{2}} \end{gathered} \tag{4.13}$$

с фиксированными граничными условиями, которые отличаются именно тем, что оператор $A \to \Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$ вообще говоря имеет нетривиальное решение, но только не при нулевых граничных условиях. Поэтому искать обратный оператор

$$-\frac{d^2}{dt^2} G(t,t') = \delta(t-t') \tag{4.14}$$

разумно именно при условии, что $G(0,t') = G(T,t') = 0$, $0 < t' < T$. (Мы переопределили параметр на мировой линии $\tau = t/T$, так что $0 < t < T$).

Смысл этой функции очевиден из полного аналога конечномерного рассуждения. Рассмотрим теперь $I(T|j) = \int_{X(0)=X(1)=0} DXe^{-\int_0^T dt\frac{\dot{X}^2}{2} + \int_0^T dt j(t)X(t)}$ и сделаем в нем подстановку $X(t) = \tilde{X}(t) + \int G(t,t')j(t')dt'$, тогда

$$\begin{gathered} I(T|j) = \int_{X(0)=X(1)=0} DXe^{-\int_0^T dt\frac{\dot{X}^2}{2} + \int_0^T dt j(t)X(t)} = \\ = \exp\left(\tfrac{1}{2}\int dtdt' j(t)G(t,t')j(t')\right) \int_{\tilde{X}(0)=\tilde{X}(1)=0} D\tilde{X}e^{-\int_0^T dt\frac{\dot{\tilde{X}}^2}{2}} = \\ = \exp\left(\tfrac{1}{2}\int dtdt' j(t)G(t,t')j(t')\right) I(T|0) \end{gathered} \tag{4.15}$$

Поэтому

$$G(t,t') = \langle X(t)X(t')\rangle = \frac{1}{I(T|0)}\ \frac{\delta^2}{\delta j(t)\delta j(t')} I(T|j)\bigg|_{j=0} \tag{4.16}$$

равна двухточечной корреляционной функции. Отметим сразу, что

- Рассуждение не зависит от размерности: мировой линии, мирового листа, мирового объема итп. Слово "мировой" здесь тоже почти лишнее - это рассуждение прекрасно применяется в квантовой теории поля - но главный его смысл заключается в выборе различных граничных условий.

- Точно такое же рассуждение годится и для интеграла по грассмановым переменным, поэтому корреляционные функции свободных фермионных полей можно вычислять так же как и для бозонных.

Задачу эту можно (и предстоит!) решить многими способами. Приведем однако сразу ответ в форме Фейнмана

$$\langle X(t)X(t')\rangle = \begin{cases} \dfrac{t(T-t')}{T}, & t < t' \\ \dfrac{t'(T-t)}{T}, & t > t' \end{cases} \tag{4.17}$$

и в форме Полякова

$$\langle X(t)X(t')\rangle = -\tfrac{1}{2}|t-t'| + \tfrac{1}{2}(t+t') - \frac{tt'}{T}, \quad 0 < t, t' < T \tag{4.18}$$

Из второго выражения видно например, что коррелятор скоростей

$$\langle \dot{X}(t)\dot{X}(t')\rangle = \delta(t-t') - \frac{1}{T}, \quad 0 < t, t' < T \tag{4.19}$$

откуда следует, что средний квадрат скорости $\langle \dot{X}(t)^2\rangle$ квантовой частицы является плохо определенной величиной. Основные задачи, оставшиеся в одномерном случае

- Обосновать ответ (4.17), (4.18). Получить его, например, методом Фурье (спектральная теория оператора Лапласа?).

- Вычислить формулу $\langle X(t)X(t')\rangle$ для периодических граничных условий $t \sim t+T$. В данном случае уравнение (4.14) нужно модифицировать

$$-\frac{d^2}{dt^2}G(t,t') = \delta(t-t') - \frac{1}{T} \tag{4.20}$$

- Вычислить двухточечную функцию для фермионов $\langle \Psi(t)\Psi(t')\rangle$.

4.3 Двумерный случай - струна

В теории на двумерном мировом листе мы можем рассмотреть аналогичную задачу. Выберем сначала и для простоты метрику в конформном виде $ds^2 = e^{\varphi}(d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2) = e^{\varphi}dzd\bar{z}$ и решим задачу для действия свободной бозонной струны

$$\begin{gathered} S[X|J] = \tfrac{1}{2}\int_{\Sigma} d^2z\partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu - \int_{\Sigma} d^2z J_\mu X^\mu \\ \Delta X^\mu(z,\bar{z}) = -J^\mu(z,\bar{z}) \end{gathered} \tag{4.21}$$

где $\alpha = 1, 2$, $\mu = 1, \dots, D$. Это практически тривиальным образом повторяет одномерное рассуждение

$$\begin{gathered} S[X|J] = \tfrac{1}{2}\int_{\Sigma} d^2z\partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu - \int_{\Sigma} d^2z J_\mu X^\mu = \\ = \tfrac{1}{2}\int_{\Sigma} d^2z X^\mu(-\Delta)X_\mu - \int_{\Sigma} d^2z J_\mu X^\mu = \tfrac{1}{2}\int_{\Sigma} d^2z J_\mu X^\mu = \\ = \tfrac{1}{2}\int d^2z d^2w J_\mu(z)G(z,w)J^\mu(w) \end{gathered} \tag{4.22}$$

где $X^\mu(z) = \int d^2w G(z,w)J^\mu(w)$ решение уравнения в (4.21), в котором использована функция Грина (действующего на функциях) двумерного оператора Лапласа $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 = 4\bar{\partial}\partial$

$$\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w) \tag{4.23}$$

Тогда, как и в случае частицы

$$\langle X^\mu(z) X_\nu(z') \rangle = \delta^\mu_\nu G(z,z') \tag{4.24}$$

Какие у него существуют решения?

- Локальное (или на всей комплексной плоскости)

$$G(z,w) = \frac{1}{2\pi}\log|z-w| \tag{4.25}$$

- Решение задач Дирихле (и Неймана) в области, например на полуплоскости или в единичном круге.

- Решение с периодическими граничными условиями - на цилиндре или на торе.

4.4 Двумерные фермионы

Действие Дирака-Вейля для двумерных безмассовых фермионов можно свести в базисе $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}$ к сумме

$$S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\overline{\Psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\Psi = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\left(\psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi}\right) \tag{4.26}$$

где мы тоже выбрали метрику в конформно-плоском виде. В случае четного числа фермионных полей-координат их можно комплексифицировать, в результате действие будет иметь вид

$$S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\left(\tilde{\psi}\bar{\partial}\psi + \tilde{\bar{\psi}}\partial\bar{\psi}\right) = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\tilde{\psi}\bar{\partial}\psi + c.c. \tag{4.27}$$

где $\tilde{\psi}$ и ψ - комплексные фермионы, или различные грассмановы функции (1/2-дифференциалы) на мировом листе, голоморфные на уравнениях движения

$$\bar{\partial}\psi = 0, \quad \bar{\partial}\tilde{\psi} = 0 \tag{4.28}$$

а для “анти-голоморфной части” действия все утверждения получаются формальным комплексным сопряжением.

Ключевым моментом теперь является все то же рассуждение с гауссовым интегралом, приводящем к двухточечной корреляционной функции

$$\langle\tilde{\psi}(z)\psi(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} \tag{4.29}$$

которая является следствием формулы Коши

$$\bar{\partial}\frac{1}{z-z'} = \pi\delta^{(2)}(z-z') \tag{4.30}$$