

Контрольная № 1
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

*Решать задачи можно как геометрически, так и аналитически,
за исключением задач, где метод решения предписан в условии.*

Вариант 1

Задача 1. Дать геометрическое определение эллипса.

Задача 2. Доказать с помощью шаров Данделена, что эллипс возникает как коническое сечение.

Задача 3. Доказать, что множество точек P , из которых парабола видна под прямым углом, — это в точности директриса параболы.

Задача 4. Найти отношение, в котором центр эллипса делит отрезок её фокальной оси, заключённый между фокусом и соответствующей директрисой.

Задача 5. Дана гипербола

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Составить её уравнение в полярной системе координат, принимая за полюс правый фокус, а за направление полярной оси — положительное направление оси Ox .

Контрольная № 1
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

*Решать задачи можно как геометрически, так и аналитически,
за исключением задач, где метод решения предписан в условии.*

Вариант 2

Задача 1. Дать аналитическое определение эллипса.

Задача 2. Доказать эквивалентность геометрического и аналитического определения эллипса.

Задача 3. Сформулировать и доказать директориальное свойство гиперболы.

Задача 4. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Составить его уравнение в полярной системе координат, принимая за полюс левый фокус, а за направление полярной оси — положительное направление оси Ox .

Задача 5. Через центр эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

проведены два взаимно перпендикулярных диаметра. Доказать, что сумма квадратов обратных величин их длин равна

$$\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2}.$$

Контрольная № 1
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

*Решать задачи можно как геометрически, так и аналитически,
за исключением задач, где метод решения предписан в условии.*

Вариант 3

Задача 1. Дать геометрическое определение параболы.

Задача 2. Сформулировать и доказать оптическое свойство параболы геометрическими методами.

Задача 3. Пусть точка P лежит на директрисе параболы. Проведем из этой точки две касательных к параболе. Пусть X и Y — точки касания. Доказать, что хорда XY проходит через фокус F , и PF — высота треугольника PXY .

Задача 4. Найти геометрическое место точек, делящих в отношении $\lambda \neq 1$ хорды окружности $x^2 + y^2 = 1$, параллельные оси Oy .

Задача 5. Какая кривая (указать тип и применимые параметры: полуоси, эксцентриситет, фокальный параметр, нахождение фокусов и осей, директрис, центра и т.д.) задаётся следующим уравнением:

$$\rho = \frac{2}{3 - 3 \cos \varphi}.$$

Контрольная № 1
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

*Решать задачи можно как геометрически, так и аналитически,
за исключением задач, где метод решения предписан в условии.*

Вариант 4

Задача 1. Дать геометрическое определение гиперболы.

Задача 2. Доказать, что конфокальные эллипсы и гиперболы пересекаются ортогонально.

Задача 3. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Составить его уравнение в полярной системе координат, принимая за полюс правый фокус, а за направление полярной оси — положительное направление оси Ox .

Задача 4. Доказать, что прямая, проведённая через середины двух параллельных хорд параболы, параллельна оси параболы.

Задача 5. Как с помощью циркуля и линейки найти вершину u нарисованной на листе бумаги параболы? *Указание: используйте предыдущую задачу.*

Контрольная № 1
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

*Решать задачи можно как геометрически, так и аналитически,
за исключением задач, где метод решения предписан в условии.*

Вариант 5

Задача 1. Дать аналитическое определение гиперболы.

Задача 2. Доказать эквивалентность геометрического и аналитического определения гиперболы.

Задача 3. Доказать, что конфокальные параболы перпендикулярны друг другу в точках пересечения.

Задача 4. Дана гипербола

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Составить её уравнение в полярной системе координат, принимая за полюс левый фокус, а за направление полярной оси — положительное направление оси Ox .

Задача 5. Найти отношение, в котором центр гиперболы делит отрезок её фокальной оси, заключённый между фокусом и соответствующей директрисой.

Контрольная № 1
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

*Решать задачи можно как геометрически, так и аналитически,
за исключением задач, где метод решения предписан в условии.*

Вариант 6

Задача 1. Дать аналитическое определение параболы.

Задача 2. Доказать эквивалентность геометрического и аналитического определения параболы.

Задача 3. Доказать с помощью шаров Данделена, что гипербола возникает как коническое сечение.

Задача 4. Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами есть среднее арифметическое длин осей.

Задача 5. Какая кривая (указать тип и применимые параметры: полуоси, эксцентриситет, фокальный параметр, нахождение фокусов и осей, директрис, центра и т.д.) задаётся следующим уравнением:

$$\rho = \frac{16}{3 - 5 \cos \varphi}.$$