Контрольная № 2
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Если в условии не оговорено обратное, то система координат предполагается прямоугольной декартовой.

Вариант 1

Задача 1. Является ли векторным пространством множество многочленов $P(x)$ степени не выше 2, удовлетворяющих условию $P(1) = 0$? Если да, постройте какой-нибудь базис и найдите размерность этого пространства.

Задача 2. Доказать, что подсистема линейно независимой системы линейно независима.

Задача 3. Пусть $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 7, 4)$, $\vec{c} = (1, 2, 1)$. Найти $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$.

Задача 4. Найти вектор $\overrightarrow{OM}$, образующий равные острые углы с лучами $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 3, 4)$ и $\overrightarrow{OC} = (-2, -1, 2)$. Лежит ли луч $\overrightarrow{OM}$ внутри или вне трёхгранного угла $OABC$?

Задача 5. Доказать, что для любых четырёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ выполняется тождество

$$[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]] = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Контрольная № 2
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Если в условии не оговорено обратное, то система координат предполагается прямоугольной декартовой.

Вариант 2

Задача 1. Выяснить, является ли векторным пространством множество положительных вещественных чисел с операциями сложения и умножения на число, заданные следующими формулами:

$$u \hat{+} v = uv, \quad \lambda \hat{\cdot} u = u^{\lambda}.$$

Задача 2. Доказать, что если в системе векторов есть нулевой вектор, то эта система линейно зависима.

Задача 3. Найти координаты вектора, если про него известно, что он перпендикулярен векторам $(2, 4, -3)$ и $(-1, 4, 6)$, образует с осью Oy тупой угол и его длина равна 13.

Задача 4. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC разделены точками P, Q и R в отношениях

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \lambda, \quad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \mu, \quad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \nu.$$

Найти отношение площади треугольника PRQ к площади треугольника ABC.

Задача 5. Доказать, что для любых четырёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ выполняется тождество

$$([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{a}, \vec{d}) \\ (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{d}) \end{vmatrix}.$$

Контрольная № 2
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Если в условии не оговорено обратное, то система координат предполагается прямоугольной декартовой.

Вариант 3

Задача 1. Является ли множество кососимметрических матриц размера $n \times n$ векторным подпространством пространства матриц размера $n \times n$? Если да, найдите размерность и предложите базис для $n = 2$.

Задача 2. Доказать, что если система линейно зависима, то в ней найдётся такой вектор, который может быть представлен как линейная комбинация остальных.

Задача 3. Даны вершины треугольника $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, -1, 3)$, $C = (-4, 7, 5)$. Найти вектор, направленный по биссектрисе его внутреннего угла B.

Задача 4. Доказать, что если векторы $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

Задача 5. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий системе уравнений $(\vec{a}, \vec{x}) = \alpha$, $(\vec{b}, \vec{x}) = \beta$, $(\vec{c}, \vec{x}) = \gamma$.

Контрольная № 2
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Если в условии не оговорено обратное, то система координат предполагается прямоугольной декартовой.

Вариант 4

Задача 1. Является ли множество невырожденных матриц размера $n \times n$ векторным подпространством пространства всех матриц размера $n \times n$? Если это подпространство, то найдите его размерность.

Задача 2. Доказать, что если у системы векторов есть линейно зависимая подсистема, то исходная система тоже линейно зависима.

Задача 3. Даны три вектора $\vec{a} = (-3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$, $\vec{c} = (5, 11, -1)$. Найти ортогональную проекцию вектора $\vec{c}$ на плоскость, порождаемую векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 4. Доказать, что площадь выпуклого плоского четырёхугольника $ABCD$ в пространстве равна половине длины вектора $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]$.

Задача 5. Доказать, что для любых четырёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ выполняется тождество

$$[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}).$$

Контрольная № 2
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Если в условии не оговорено обратное, то система координат предполагается прямоугольной декартовой.

Вариант 5

Задача 1. Рассмотрим множество векторов из $\mathbb{R}^n$, таких, что сумма их координат равна нулю. Является ли это множество с естественными операциями векторным пространством? Если да, то постройте базис и найдите размерность.

Задача 2. Доказать, что два базиса конечномерного векторного пространства всегда состоят из одинакового количество векторов.

Задача 3. Найти угол между вектором $\vec{c} = (0, 2, 1)$ и его ортогональной проекцией на плоскость, порождаемую векторами $\vec{a} = (1, 1, 1)$ и $\vec{c} = (2, -1, 2)$.

Задача 4. Две тройки векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}^1$, $\vec{a}^2$, $\vec{a}^3$ называются взаимными, если векторы этих троек связаны соотношениями

$$(\vec{a}_i, \vec{a}^j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Найдите явные формулы для $\vec{a}^1$, $\vec{a}^2$, $\vec{a}^3$ через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.

Задача 5. Доказать тождество

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{x}) & (\vec{b}, \vec{x}) & (\vec{c}, \vec{x}) \\ (\vec{a}, \vec{y}) & (\vec{b}, \vec{y}) & (\vec{c}, \vec{y}) \\ (\vec{a}, \vec{z}) & (\vec{b}, \vec{z}) & (\vec{c}, \vec{z}) \end{vmatrix}.$$

Контрольная № 2
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Если в условии не оговорено обратное, то система координат предполагается прямоугольной декартовой.

Вариант 6

Задача 1. В векторном пространстве многочленов степени не выше 2 рассмотрим подмножество таких многочленов $P(x)$, что $2P(0) = 5P(1)$. Является ли это подмножество векторным подпространством? Если да, постройте какой-либо базис и найдите размерность.

Задача 2. Доказать, что каждый вектор может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов, и что это представление вектора в виде линейной комбинации базисных векторов единственно.

Задача 3. Найти угол между единичными векторами $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что $\vec{s} + 2\vec{t} \perp 5\vec{s} - 4\vec{t}$.

Задача 4. Даны четыре вектора $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (2, -1, 2)$, $\overrightarrow{OC} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{OD} = (2, -2, 1)$. Лежит ли луч OD внутри или вне трёхгранного угла $OABC$?

Задача 5. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий системе уравнений $(\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}) = \gamma$, $(\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha$, $(\vec{x}, \vec{c}, \vec{a}) = \beta$.