Задачи для семинара № 7
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014

Аффинные и ортогональные замены базиса и координат, ортогональные инварианты плоских кривых второго порядка

Задача 1. На плоскости даны две системы координат Oxy и $O'x'y'$, связанные формулами перехода

$$x = 3x' - 4y' - 5, \quad y = -x' + 2y' + 1.$$

1) Найти координаты начала второй системы и единичных векторов её осей относительно первой системы.
2) Найти координаты относительно системы Oxy вектора диагонали параллелограмма, образованного единичными векторами осей системы $O'x'y'$.
3) Выразить координаты x', y' через координаты x, y.
4) Какие координаты в системе координат Oxy имеет единичная точка $E' = (1, 1)$ системы координат $O'x'y'$?
5) Написать уравнения осей $O'x'$ и $O'y'$ в системе координат Oxy.
6) Написать уравнение прямой $2x - 3y + 1 = 0$ в системе координат $O'x'y'$.

Задача 2. Написать формулы преобразования координат на плоскости, принимая за новые оси $O'x'$ и $O'y'$ прямые $x-3y+2 = 0$ и $3x+2y-1 = 0$ соответственно, а за единичную точку новой системы (то есть точку с координатами $x' = 1$, $y' = 1$) — точку $(2, 3)$.

Задача 3. Даны точка $(0, 2)$ пересечения медиан треугольника и уравнения двух его сторон $5x - 4y + 15 = 0$ и $4x + y - 9 = 0$. Найти уравнение третьей стороны треугольника. *Указание: примените подходящую замену координат.*

Задача 4. Задано преобразование прямоугольных коорднат на плоскости от Oxy к $O'x'y'$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 1, \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' - 2.$$

Найти формулы обратного перехода от системы $O'x'y'$ к системе Oxy.

Задача 5. Составить каноническое уравнение кривой, если заданы её инварианты

$$I_1 = 7, \quad I_2 = 10, \quad I_3 = -20.$$

Что это за кривая?

Задача 6. Доказать, что условия $I_1^2 = 4I_2$, $I_1 I_3 < 0$ необходимы и достаточны для того, чтобы уравнение кривой второго порядка определяло окружность.

Задача 7. Привести условия на инварианты, необходимые и достаточные для того, чтобы кривая второго порядка являлась параболой. Выразить через инварианты её фокальный параметр.

Задача 8. Докажите, что уравнение второго порядка задаёт равностороннюю гиперболу тогда и только тогда, когда $I_1 = 0$, $I_3 \neq 0$.

Задача 9*. Какие условия на инварианты необходимы и достаточны для того, чтобы уравнение второго порядка задавало действительный эллипс? Выразите через инварианты I_1, I_2, I_3 длины a и b полуосей эллипса и найдите его площадь S.

Задача 10*. С помощью инвариантов выразите необходимое и достаточное условие того, что уравнение второго порядка задает гиперболу, лежащую в остром угле, образованном её асимптотами.