Программа экзамена по курсу геометрии-1
Матфак ВШЭ, первый модуль 2014-2015 учебного года

1. Геометрическая (то есть методами «школьной» геометрии) теория конических сечений: определение эллипса, гиперболы и параболы как соответствующих геометрических мест точек, их построение как конических сечений (рассуждение через шары Данделена).

2. Геометрическая (то есть методами «школьной» геометрии) теория конических сечений: касательные как прямые, имеющие с коникой только одну общую точку, построение касательных к параболе, оптические свойства коник, конфокальные коники, перпендикулярность конфокальных коник.

3. Аналитическая теория конических сечений: определение эллипса, гиперболы и параболы как кривых, заданных в некоторой прямоугольной декартовой системе координат соответствующими уравнениями, эквивалентность геометрическим определениям, асимптоты гиперболы, фокальный параметр как половина длины фокальной хорды, ортогональной большой оси, эксцентриситет, директрисы и директориальные свойства конических сечений, полярные координаты и уравнения конических сечений в удобных полярных кооординатах.

4. Векторные пространства над полем, линейная зависимость и независимость, базис, координаты вектора, размерность пространства, линейные отображения и изоморфизмы, изоморфность конечномерных векторных пространств одинаковой размерности. Аффинные пространства, репер, координаты точки. Векторные подпространства и аффинные подпространства.

5. Прямые как аффинные подпространства размерности 1, вывод из этого определения параметрического и канонического уравнения. Плоские алгебраические кривые, прямые в плоскости как алгебраические кривые степени 1.

6. Плоскости как аффинные подпространства размерности 2, вывод из этого определения параметрического уравнения плоскости. Плоскости в трёхмерном пространстве как решения уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$.

7. Симметрические билинейные формы. Положительная определённость. Евклидово скалярное произведение, ортогональные и ортонормированные базисы, формула для скалярного произведения через координаты в ортонормированном базисе. Длина вектора и угол между векторами. Деление отрезка в данном отношении.

8. Ориентированная площадь параллелограмма и ориентация в плоскости. Ориентация как выбор класса эквивалентности базисов в плоскости и пространстве. Векторное произведение и смешанное произведение, связь с ориентированным объёмом, основные свойства, явные формулы в координатах. Тождество «бац-цаб» и тождество Якоби.

9. Прямые в аффинном пространстве как одномерные аффинные подпространства, параметрическое уравнение прямой, аксиомы планиметрии о прямых как теоремы в таком подходе. Прямые в плоскости, общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Полуплоскости. Собственный и несобственный пучок прямых на плоскости.

10. Прямые в евклидовой плоскости: вектор нормали, угол между прямыми, расстояние от точки до прямой.

11. Плоскости в аффинном пространстве как двумерные аффинные подпространства, параметрическое задание плоскости, аксиомы стереометрии о плоскостях как теоремы в таком подходе. Обобщение: k-мерные плоскости в $\mathbb{A}^n$. Плоскости в трехмерном аффинном пространстве, общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Полупространства. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Пучок и связка плоскостей.

12. Плоскости в евклидовом пространстве: расстояние от точки до плоскости, угол между плоскостями. Прямые в трёхмерном пространстве: способы задания, расстояние от точки до прямой в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между двумя прямыми, расстояние между скрещивающимися прямыми.

13. Замена базиса, замена координат, матрица перехода. Ортогональные матрицы, группы $O(n)$ и $SO(n)$. Явное описание ортогональных матриц размера 2×2.

14. Углы Эйлера. Кватернионы. Параметризация $SO(3)$ через кватернионы единичной длины, теорема Кэли-Клейна (без доказательства того, что каждая матрица из $SO(3)$ представима через кватернионы).

15. Плоские кривые второй степени, квадрики. Приведение квадрик к каноническому виду ортогональными преобразованиями. Ортогональные инварианты квадрик. Классификация квадрик с точностью до ортогональных преобразований.