Листок 4: Целые расширения. Теорема Гильберта о нулях.

Задачи по коммутативной алгебре - матфак ВШЭ

надо сдать до 14.11.2014 включительно

1 Пусть G конечная группа автоморфизмов кольца B и $A = B^G$ - подкольцо инвариантов. Покажите, что B цело над A.

2 (Это упражнение не по теме листка, оно служит леммой для следующего.) Пусть $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ простые идеалы, а идеал $I \subset \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Докажите, что I содержится в одном из $\mathfrak{p}_i$.

Пусть теперь $\mathfrak{p}$ – простой идеал, содержащий пересечение идеалов J_i, $i = 1, \ldots, k$. Докажите, что $\mathfrak{p}$ содержит один из J_i.

3 Пусть теперь $\mathfrak{p}$ – простой идеал в $A = B^G$, а Q - множество таких простых идеалов $\mathfrak{q}$ в B, что $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Докажите, что G транзитивно действует на множестве Q. Указание: пусть $I_1, I_2 \in Q$, покажите, что I_1 содержится в объединении $g(I_2), g \in G$. Потом воспользуйтесь предыдущим упражнением.

4 (теорема о подъеме) Пусть B цело над A, $I_1 \subset I_2 \subset A$ простые идеалы, а J_1 такой простой идеал в B, что $J_1 \cap A = I_1$ (он существует по теореме из лекций, на которую можно ссылаться!). Докажите, что существует такой простой идеал $J_2 \subset B$, что $J_2 \cap A = I_2$ и $J_1 \subset J_2$.

5 Пусть $\phi : A \to B$ целый гомоморфизм колец (т.е. B цело над A). Покажите, что индуцированное отображение из $Spec(B)$ в $Spec(A)$ замкнуто (т.е. переводит замкнутые множества в замкнутые). Приведите пример незамкнутого отображения спектров, соответствующего гомоморфизму колец.

6 Пусть B цело над A и $f : A \to K$ гомоморфизм в алгебраически замкнутое поле K. Покажите, что f продолжается до гомоморфизма из B в K.

7 Пусть K алгебраически замкнутое поле и L – поле, содержащее K. Докажите, что если некоторая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в K имеет решение в L, то она имеет решение и в K.

8 ("трюк Рабиновича") Пусть K алгебраически замкнутое поле, I идеал в $K[X_1, \ldots, X_n]$, а $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ такой многочлен, что он обращается в нуль в любой точке $x \in K^n$, где все $G \in I$ обращаются в нуль. Покажите, что идеал в $K[X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}]$, порожденный I и $FX_{n+1} - 1$, совпадает со всем кольцом.

9 В условиях предыдущей задачи покажите, что кольцо частных $(K[X_1, \ldots, X_n]/I)_F$ нулевое. Выведите из этого, что $F^N \in I$ для некоторого N.

10 Докажите, что $\mathbf{Q}$ не является конечно порожденной $\mathbf{Z}$-алгеброй. Используя лемму Нетер, докажите, что и вообще никакое поле нулевой характеристики не может быть конечно порожденной $\mathbf{Z}$-алгеброй.

11 Пусть I максимальный идеал в конечно порожденной $\mathbf{Z}$-алгебре A. Докажите, что A/I – конечное поле.

12 Как доказано на лекциях, максимальные идеалы плотны в спектре конечно порожденной алгебры над алгебраически замкнутым полем. Как модифицировать доказательство, чтобы избавиться от предположения алгебраической замкнутости? Докажите, что максимальные идеалы плотны в спектре конечно порожденной $\mathbf{Z}$-алгебры.