

Теория струн и конформная теория поля.
Контрольная работа, 1 модуль

1. Вычислите интеграл по грассмановым переменным $\int d\theta_1 d\theta_2 \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} \theta_i \theta_j\right)$

для матриц а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Вычислите “суперсимметричный” интеграл по комплексным (четным и нечетным) переменным

$$\int d\bar{z} dz d\bar{\psi} d\psi \exp(-\bar{z}^i A_{ij} z^j - \bar{\psi}^i A_{ij} \psi^j)$$

Чему будет равен аналогичный интеграл по действительным (четным и нечетным) переменным?

$$\int dx d\theta \exp(-x^i A_{ij} x^j - \theta^i A_{ij} \theta^j)$$

3. Выведите уравнения движения точечной релятивистской частицы в произвольной пространственно-временной метрике $G_{\mu\nu}(X)$:

$$S[X; e] = \frac{1}{2} \int d\tau \left(e^{-1} G_{\mu\nu}(X) \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} + m^2 e \right)$$

4. Решить уравнение Лапласа $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi(x, y) = 0$ в верхней полуплоскости $y \geq 0$ с граничным условием $\Phi(x, 0) = \sin(x)$.

5. Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет пропагатор свободной релятивистской частицы

$$\mathcal{K}(X) = \int_0^\infty dT \frac{e^{-\frac{|X|^2}{2T} - \frac{m^2}{2} T}}{T^{D/2}}$$

Найти решение этого уравнения в виде интеграла Фурье.

6. В теории свободного скалярного поля с действием $S = \frac{1}{2} \int_\Sigma d^2 z \partial_\alpha X \partial_\alpha X$ вычислить трехточечную корреляционную функцию $\langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_3}(z_3) \rangle$ операторов $V_\alpha(z) = \exp(i\alpha X(z))$. Ответ выразить как функцию координат z_i и размерностей $\Delta_i = \frac{1}{2} \alpha_i^2$.

7. В теории свободного комплексного фермиона с действием $S = \frac{1}{\pi} \int_\Sigma d^2 z \tilde{\psi} \bar{\partial} \psi$ вычислить 4-точечную корреляционную функцию $\langle \tilde{\psi}(z_1) \tilde{\psi}(z_2) \psi(w_1) \psi(w_2) \rangle$.

8. Доказать с помощью бозонизации и теоремы Вика формулу Коши для детерминанта $\det_{i,j} \left\| \frac{1}{z_i - w_j} \right\|$.