Задачи по группам и алгебрам Ли – 4. Действия, представления, универсальная обертывающая алгебра.

Зачет по данному листку ставится в случае сдачи 80% пунктов задач без звездочки. Задачи со звездочкой стоят вдвое дороже. Дедлайн 14 ноября.

1*. а) Докажите, что универсальное накрытие $\widetilde{G}$ связной группы Ли G имеет единственную структуру группы Ли, такую, что отображение накрытия является гомоморфизмом групп Ли. Группа Ли $\widetilde{G}$ называется односвязной накрывающей группы Ли G. **б)** Докажите, что ядро гомоморфизма $\widetilde{G} \to G$ есть дискретная группа, изоморфная $\pi_1(G)$. **в)** Докажите, что для всякого гомоморфизма алгебр Ли $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ существует единственный гомоморфизм соответствующих односвязных групп Ли $\varphi : G_1 \to G_2$ такой, что $d_e\varphi = f$. *Указание:* в окрестности единицы такой гомоморфизм строится при помощи экспоненциального отображения. Далее, этот гомоморфизм можно продолжить на всю группу вдоль любого пути в группе и воспользоваться односвязностью для доказательства корректности. **г)** Докажите, что каждой алгебре Ли соответствует не более одной связной односвязной группы Ли с точностью до изоморфизма (на самом деле, ровно одна).

2. а) Докажите, что универсальная накрывающая группы Ли S^1 изоморфна $\mathbb{R}$. **б)** Докажите, что универсальная накрывающая группы Ли $SO_3(\mathbb{R})$ изоморфна SU_2, и универсальное накрытие двулистно. **в*)** Докажите, что универсальная накрывающая группы Ли $SO_4(\mathbb{R})$ изоморфна $SU_2 \times SU_2$, и универсальное накрытие двулистно.

Представлением группы Ли называется гладкий гомоморфизм $G \to GL(V)$, где V – векторное пространство. *Представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, где V – векторное пространство. Понятия гомоморфизма представлений, неприводимого представления, прямой суммы представлений и т.д. определяются обычным образом.

3. а) Докажите, что дифференциал гомоморфизма $G \to GL(V)$ в точке $e \in G$ является представлением алгебры Ли $\mathfrak{g} = T_eG$. **б)** Пользуясь задачей 1, докажите, что всякое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вляется дифференциалом некоторого представления соответствующей связной односвязной группы Ли.

4. Опишите с точностью до изоморфизма все комплексные представления группы Ли **а)** $\mathbb{R}$; **б)** S^1. **в)** Какие из этих представлений неприводимы? неразложимы? вполне приводимы?

Универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется пара $(U(\mathfrak{g}), \epsilon)$, где $U(\mathfrak{g})$ – ассоциативная алгебра с единицей, $\epsilon : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})^-$ – гомоморфизм алгебр Ли, обладающая следующим *универсальным свойством*: для любой ассоциативной алгебры A и гомоморфизма алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{g} \to A^-$ существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \to A$, такой, что $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \epsilon$.

5. а) Докажите, что универсальная обертывающая алгебра данной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ единственна с точностью до изоморфизма. **б)** Докажите, что всякое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ однозначно продолжается до представления универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ (таким образом, теория представлений связной односвязной группы Ли, теория представлений ее алгебры Ли и теория представлений ее универсальной обертывающей алгебры – одно и то же).

6. Пусть $T(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \oplus \ldots$ – тензорная алгебра пространства $\mathfrak{g}$ (т.е. свободная ассоциативная алгебра, порожденная пространством $\mathfrak{g}$) и пусть $J \subset T(\mathfrak{g})$ – двусторонний идеал, порожденный элементами $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ для всех элементов $x, y \in \mathfrak{g}$. Докажите, что ассоциативная алгебра $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J$ с тождественным отображением $\epsilon : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \subset T(\mathfrak{g})$ обладает требуемым универсальным свойством. *Указание:* иначе говоря, пусть $x_1, \ldots x_n$ – базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и пусть $[x_i, x_j] = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$. Надо докажзать, что $U(\mathfrak{g})$ есть ассоциативная алгебра с образующими $x_1, \ldots, x_n$ и определяющими соотношениями $x_i x_j - x_j x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$, причем $\epsilon(x_i) = x_i$.

7. а) Докажите, что универсальная обертывающая алгебра абелевой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть алгебра полиномов $S(\mathfrak{g})$. **б*)** Докажите, что универсальная обертывающая алгебра двумерной неабелевой алгебры Ли изоморфна подалгебре в алгебре дифференциальных операторов на прямой, порожденной операторами x и $x\frac{\partial}{\partial x}$.

8. Пусть $x_1,\dots,x_n$ базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Докажите, что мономы вида $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}$, где $k_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, образуют полную систему в векторном пространстве $U(\mathfrak{g})$.

Обобщенной функцией на многообразии M, сосредоточенной в точке $m\in M$, называется линейный функционал $F: C^\infty(M)\to\mathbb{R}$, такой, что для некоторого $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеем $F(\mathfrak{m}_m^n)=0$, где $\mathfrak{m}_m=\{f\in C^\infty(M)\mid f(m)=0\}$ – максимальный идеал точки $m\in M$.

9. Пусть D – дифференциальный оператор на многообразии M и $m\in M$. Докажите, что значение оператора D в точке m, т.е. функционал $F(f):=D(f)(m)$, является обобщенной функцией на M, сосредоточенной в точке $m\in M$.

10. а) Пусть $\varphi: M\to N$ – гладкое отображение многообразий и F – обобщенная функция на M, сосредототоченная в точке $m\in M$. Докажите, что функционал $\varphi_*F: C^\infty(N)\to\mathbb{R}$, действующий как $\varphi_*F(f):=F(\varphi^*f)$ есть обобщенная функция на N, сосредоточенная в точке $\varphi(m)$. **б)** Пусть M и N – многообразия. Докажите, что пространство обобщенных функций на $M\times N$, сосредоточенных в точке $(m,n)\in M\times N$, есть тензорное произведение пространств обобщенных функций на M и N, сосредоточенных в точках m и n соответственно.

11*. Пусть F_1, F_2 – обобщенные функции на группе Ли G, сосредоточенные в точке $e\in G$. Определим свертку $F_1 * F_2$ следующим образом: $F_1 * F_2 := m_*(F_1\otimes F_2)$, где $m: G\times G\to G$ – отображение умножения. Докажите, что операция свертки задает структуру ассоциативной алгебры на пространстве обобщенных функций на G, сосредоточенных в точке $e\in G$.

12*. а) Докажите, что всякий левоинвариантный дифференциальный оператор на группе Ли G однозначно определяется своим значением в точке $e\in G$. **б)** Докажите, что алгебра левоинвариантных дифференциальных операторов на G изоморфна алгебре обобщенных функций на G, сосредоточенных в точке $e\in G$, относительно свертки. **в)** Постройте сюръективный гомоморфизм алгебры $U(\mathfrak{g})$ на алгебру левоинариантных дифференциальных операторов на группе G. *Указание:* вложите алгебру Ли $\mathfrak{g}$ как левоинвариантные векторные поля и воспользуйтесь универсальным свойством $U(\mathfrak{g})$. **г)** Докажите *теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта*: пусть $x_1,\dots,x_n$ базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, тогда мономы вида $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}$ образуют базис в векторном пространстве $U(\mathfrak{g})$.

Действием группы Ли G на многообразии M называется такое действие группы G на множестве M, что отображение $G\times M\to M$, переводящее $(g,m)\in G\times M$ в gm, гладко.

13. а) Докажите, что для всякого элемента $g\in G$ отображение $m\mapsto gm$ является диффеоморфизмом многообразия M. **б)** Докажите, что стабилизатор G_m любой точки $m\in M$ в группе G является подгруппой Ли группы G. *Указание:* рассмотрите гладкое отображение $\varphi_m: G\to M$, переводящее $g\in G$ в $gm\in M$, и докажите, что оно имеет постоянный ранг. G_m есть прообраз точки $m\in M$ при этом отображении. **в)** Докажите, что алгебра Ли группы Ли G_m есть $\operatorname{Ker} d_e\varphi_m\subset T_eG$.

14. Докажите, что следующие группы являются группами Ли, и найдите их размерности. **а)** Симплектическая группа $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ – подгруппа в $GL_{2n}(\mathbb{R})$, состоящая из линейных преобразований, сохраняющих невырожденную кососимметрическую форму; **б)** подгруппа в $GL_n(\mathbb{R})$, состоящая из линейных преобразований, сохраняющих вырожденную симметрическую форму ранга k и заданной сигнатуры; **в)** подгруппа в $GL_n(\mathbb{R})$, состоящая из линейных преобразований, сохраняющих вырожденную кососимметрическую форму ранга $2k$. *Указание:* рассмотрите действие группы $GL_n(\mathbb{R})$ на пространстве билинейных форм на пространстве $\mathbb{R}^n$.

15. Группа Ли G действует на многообразии M. Каждому элементу x алгебры Ли $\mathfrak{g}=T_eG$ сопоставим векторное поле v_x на M такое, что $v_x(m)=d_e\varphi_m(x)$. **а)** Докажите, что поле скоростей любого семейства диффеоморфизмов действия группы G на M имеет вид v_x для некоторого $x\in\mathfrak{g}$. **б)** Докажите, что $x\mapsto v_x$ есть гомоморфизм алгебр Ли. **в)** Докажите, что этот гомоморфизм продолжается до гомоморфизма универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ в алгебру дифференциальных операторов на M.

16*. Группа Ли $SL_2(\mathbb{C})$ действует дробно-линейными преобразованиями $\mathbb{CP}^1$. Получается гомоморфизм $U(\mathfrak{sl}_2)$ в алгебру голоморфных дифференциальных операторов на $\mathbb{CP}^1$. **а)** Опишите ядро этого гомоморфизма. **б)** Докажите, что этот гомоморфизм сюръективен.