УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА И ТЕОРЕМА ПБВ

Важной концепцией в теории алгебр Ли является понятие универсальной обертывающей алгебры. Как мы хорошо знаем, если A - алгебра, то сделать из нее алгебру Ли очень легко - достаточно определить скобку по правилу $[a,b] = ab - ba$. Можно задаться обратным вопросом - всегда ли операция скобки в алгебре Ли происходит из коммутатора в какой-то ассоциативной алгебре? Другими словами, верно ли, что для любой алгебры Ли L существует такая ассоциативная алгебра A, что L можно вложить в A гомоморфизмом алгебр Ли?

Определение. Универсальной обертывающей алгеброй $\mathcal{U}(L)$ алгебры Ли L называется алгебра, свободно порожденная L с соотношениями $ab - ba = [a,b]$ для $\forall a, b \in L$.

Определение. $\mathcal{U}(L)$ также можно задать следующим универсальным свойством: пусть L - алгебра Ли, A - произвольная ассоциативная алгебра. Тогда для любого отображения алгебр Ли $f : L \to A$ существует единственное продолжение этого отображения до морфизма ассоциативных алгебр $\hat{f} : \mathcal{U}(L) \to A$.

Задача 1. Покажите эквивалентность этих определений.

Указание: это довольно стандартная (категорная) техника. Если не получается, попробуйте поискать, как это делается, например, для универсального свойства свободной группы (или свободной алгебры).

Понятно, что для ответа на наш исходный вопрос достаточно изучать только универсальную обертывающую алгебру (из-за универсального свойства). С другой стороны, про нее ответ не очевиден, так как алгебра Ли L могла бы (a priori) и не вкладываться в $\mathcal{U}(L)$ (а как-то отображаться с нетривиальным ядром). Это является следствием важной теоремы **Пуанкаре-Биркгофа-Витта**.

Определение. Фильтрацией на алгебре A называется такой набор подпространств $... \subset F_k \subset F_{k+1} \subset ...$, что, во-первых $\bigcup F_k = A$ и, во-вторых, для любых $a \in F_k, b \in F_l$ выполнено, что $ab \in F_{k+l}$.

Задача 2. Фильтрация степени: Покажите, что если алгебра A порождена векторным подпространством $V \subset A$, то на A можно задать фильтрацию следующим образом: определим F_k как множество таких элементов A, которые получаются как суммы не более чем k-кратных произведений элементов из V.

В частности, так как $\mathcal{U}(L)$ порождена L, на ней можно задать фильтрацию степени.

Определение. Пусть A - фильтрованная алгебра. Тогда **присоединенной градуированной алгеброй** $Gr(A)$ называется $\bigoplus Gr_k(A)$ где $Gr_k(A) = F_k(A)/F_{k-1}(A)$, снабженная операцией умножения, приходящей из умножения на исходной алгебре A: для любых $a \in Gr_k(A)$ и $b \in Gr_l(A)$ поднимем их произвольным образом в $F_k(A)$ и $F_l(A)$, перемножим и спустим назад в $Gr_{k+l}(A)$

Задача 3. Покажите, что это определение корректно (не зависит от выбора подъемов).

Теорема (Пуанкаре-Биркгофф-Витт)**.** $Gr(\mathcal{U}(L)) = Sym(L)$

Заметим, в частности, что факт о вложении L в $\mathcal{U}(L)$ является частным случаем этой теоремы для F_1/F_0.

В этой серии листков планируется рассказать о нескольких доказательствах (и, соответственно, смыслах) теоремы ПБВ. Этот листок посвящен алгебраическому доказательству, работающему в достаточно общей ситуации.

Определение. Выберем в L упорядоченный базис $e_1, e_2, ...$ (в дальнейшем будем предполагать, что алгебра хотя бы счетномерна, либо пользоваться теоремой Цермело для выбора вполне упорядоченного базиса). **Упорядоченными мономами** в $\mathcal{U}(L)$ будем называть мономы вида $e_1^{k_1}...e_n^{k_n}$.

Задача 4. Упорядоченные мономы порождают $\mathcal{U}(L)$ как линейное пространство.

Указание: если у вас есть неупорядоченный моном, можно начать переставлять его сомножители, получая поправку, меньшую по степени, и пользоваться предположением индукции.

Задача 5. Покажите, что утверждение о том, что упорядоченные мономы образуют *базис* в универсальной обертывающей алгебре эквивалентно теореме ПБВ.

Идея доказательства: раз уж мы верим, что упорядоченные мономы образуют базис, мы можем попытаться *построить* умножение в этом базисе - и если это удастся, задача будет решена.

Дальнейшие определения эмулируют эквивалентность слов в универсальной обертывающей алгебре.

Определение. Для любого (неупорядоченного) монома будем называть **упорядочивающей перестановкой** σ такую перестановку его сомножителей, что в результате получается упорядоченный моном, **способом упорядочения** разложение упорядочивающей перестановки в произведение элементарных транспозиций $\sigma = \sigma_{i_1}...\sigma_{i_n}$, где $\sigma_i = (i, i+1)$.

Определение. Невязкой транспозиции σ_i для слова $X = e_{s_1}...e_{s_i}e_{s_{i+1}}...e_{s_n}$ будем называть следующее выражение: $D_{\sigma_i}(X) = e_{s_1}...[e_{s_i}, e_{s_{i+1}}]...e_{s_n}$, где коммутатор рассматривается как элемент L и раскладывается по базису.

Определение. Невязка способа упорядочения: для способа упорядочения $\sigma = \sigma_{i_1}...\sigma_{i_n}$ определим $D_\sigma(X) = D_{\sigma_{i_1}...\sigma_{i_{n-1}}}(\sigma_{i_n}X) + D_{\sigma_{i_n}}(X) = \sum_{k=1}^n D_{\sigma_{i_k}}(\sigma_{i_{k+1}}...\sigma_{i_n}X)$

Для утонувших в этой формуле: мы просто применяем транспозиции σ_{i_k} по очереди и суммируем невязку

Задача 6. $X = \sigma X + D_\sigma(X)$ в $\mathcal{U}(L)$

Определение. Нормальной формой слова $N(X)$ будем называть $\sigma X + N(D_\sigma X)$ для любого способа упорядочения σ.

Теперь мы попытаемся показать, что $N(X)$ корректно определена.

Задача 7. Покажите, что группа перестановок S_n порождена образующими $\sigma_i = (i, i+1)$ с соотношениями

$$\sigma_i^2 = e$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

и

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, |i-j| \geq 2$$

Указание: если визуализировать разложение на транспозиции как диаграмму из трансверсально пересекающихся нитей, то соотношения соответствуют третьему преобразованию Редемейстера

Лемма. $N(X)$ *корректно определена.*

Предположим, что $N(X)$ корректно определена для всех слов из не более чем $n-1$ буквы.

Задача 8. Покажите, что невязка транспозиции, меняющей одинаковые буквы, нулевая (и, следовательно, перестановка σ определена однозначно с точностью до транспозиций, не имеющих невязки).

Задача 9 (шаг индукции)**.** Покажите, что для любого слова X из n букв невязка способа упорядочения не зависит от способа упорядочения.

Указание: благодаря задаче 8, достаточно решить задачу только для способов упорядочения, отличающихся на соотношения из группы S_n. С полученными невязками можно свободно манипулировать благодаря предположению индукции.

Определение. Определим алгебру $\tilde{\mathcal{U}}(L)$ как алгебру с базисом из упорядоченных слов и умножением, задаваемым формулой: $A \star B = N(AB)$.

Задача 10. Покажите, что это умножение ассоциативно.

Указание: покажите, что $N(AB) = N(N(A)N(B))$

Задача 11. Постройте гомоморфизм $\tilde{\mathcal{U}}(L)$ в $\mathcal{U}(L)$ и постройте обратный, пользуясь универсальным свойством.

Задача 12. Докажите теорему ПБВ.