Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи
УДК 512.813.3, 512.722, 514.763.44

Солдатенков Андрей Олегович

# Геометрия гиперкомплексных многообразий

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
PhD, профессор
Вербицкий Михаил Сергеевич

Москва – 2014

# Содержание

# Введение

В данной работе изучаются некоторые вопросы теории гиперкомплексных многообразий. Гиперкомплексное многообразие — это дифференцируемое многообразие с тремя комплексными структурами, которые удовлетворяют кватернионным соотношениям. Обзор известных результатов о гиперкомплексных многообразиях можно найти в главе 1.

В главе 2 мы изучаем связность Обаты на одном из гиперкомплексных многообразий, построенных в работе Джойса [29]. Связность Обаты на гиперкомплексном многообразии — это единственная связность без кручения, которая сохраняет гиперкомплексную структуру. Существование и единственность этой связности были доказаны Обатой [35]. Вопрос, который мы изучаем, состоит в том, чтобы найти группу голономии этой связности. Используя некоторые свойства тензора кривизны, мы доказываем, что представление голономии является неприводимым (предложение 2.3.6). Далее мы применяем классификацию неприводимых групп голономии из работы Меркулова и Швахофера [34], и доказываем, что голономия связности Обаты в рассматриваемом случае равна $GL(2,\mathbb{H})$ (теорема 2.3.8).

В главе 3 исследуются подмногообразия гиперкомплексных многообразий. Гиперкомплексная структура определяет семейство комплексных многообразий, называемое твисторным семейство. Это семейство параметризуется точками проективной прямой $\mathbb{C}P^1$. Мы называем комплексную структуру из этого семейства общей, если соответствующая точка лежит в дополнение к некоторому счетному множеству. Основной результат этой главы (теорема 3.3.3) состоит в том, что для гиперкомплексного $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия с HKT-метрикой общее многообразие из твисторного семейства не содержит дивизоров, а все подмногообразия коразмерности два являются трианалитическими. Кроме того, без предположения о существовании HKT-метрики, мы докажем, что в общем многообразии из твисторного семейства нет голоморфных лагранжевых подмногообразий (теорема 3.3.5).

В главе 4 изучаются голоморфные лагранжевы расслоения на гиперкомплексных многообразиях. Голоморфные лагранжевы расслоения на гиперкэлеровых многообразиях активно исследовались в последнее время (см., например, [45]). В то же время, это понятие имеет смысл и для более общих гиперкомплексных $SL(n, \mathbb{H})$-многообразий, но в этом случае оно гораздо меньше изучено. Основным результатом главы является теорема 4.3.3, утверждающая, что база голоморфного лагранжева расслоения, тотальное пространство которого допускает HKT-метрику, является кэлеровым многообразием. Этот результат можно использовать для того, чтобы строить примеры гиперкомплексных многообразий, не допускающий HKT-метрики. В конце главы мы строим такие примеры.

Материалы диссертации опубликованы в двух печатных работах [47, 48] в рецензируемых журналах, работа [49] принята к печати в рецензируемом журнале.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность своему научному руководителю М. Вербицкому, без внимания и настойчивости которого эта диссертация не могла быть написана. Работа была выполнена при поддержке фонда Д. Зимина "Династия" и лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ-ВШЭ (грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0023).

# Глава 1

# Предварительные сведения

Эта глава носит подготовительный характер. В ней приведены необходимые для дальнейшего сведения о гиперкомплексных структурах, связности Обаты, группах голономии и теории калибраций.

## 1.1. Гиперкомплексные структуры на многообразиях

В дальнейшем мы будем всегда рассматривать дифференцируемые многообразия без края, класса $C^\infty$. Все расслоения и их сечения также будут предполагаться бесконечно гладкими. Пусть $M$ — такое многообразие. Касательное расслоение к $M$ будет обозначаться через $TM$, кокасательное — $\Lambda^1 M$, расслоение внешних $k$-форм — $\Lambda^k M$. Мы будем обозначать пространство сечений расслоения тем же символом, что и само расслоение, например, запись $\omega \in \Lambda^k M$ означает, что $\omega$ — это внешняя $k$-форма на $M$.

Одним из основных объектов для нас будут почти-комплексные структуры на многообразии $M$. Напомним, что почти-комплексная структура на $M$ — это эндоморфизм $I\colon TM \to TM$, для которого $I^2 = -Id$. Любое комплексное многообразие (то есть многообразие, атлас которого состоит из областей в $\mathbb{C}^n$ с голоморфными функциями перехода) обладает почти-комплексной структурой. Обратное верно только при дополнительных условиях на почти-комплексную структуру. Коротко напомним, в чем они состоят (подробности см. в [8], глава 2).

Тензор Нийенхейса для почти-комплексной структуры $I$ можно определить следующей формулой:

$$N_I(X,Y) = [X,Y] + I[IX,Y] + I[X,IY] - [IX,IY]. \tag{1.1.1}$$

Если тензор Нийенхейса равен нулю, то почти-комплексная структура называется интегрируемой. Несложно проверить, что на комплексном многообразии соответствующая почти-комплексная структура интегрируема. Более того, имеет место следующая фундаментальная теорема Ньюлендера и Ниренберга (см. [8], 2.12):

**Теорема 1.1.1** (Ньюлендер-Ниренберг)**.** *Пусть $I$ — почти-комплексная структура на многообразии $M$. Тогда условие $N_I = 0$ равносильно тому, что $(M, I)$ — комплексное многообразие.*

Перейдем теперь к рассмотрению гиперкомплексных структур.

**Определение 1.1.2.** *Гиперкомплексная структура на $M$ — это тройка интегрируемых почти-комплексных структур $I$, $J$, $K$, удовлетворяющих соотношению*

$$IJ = -JI = K.$$

*При этом $M$ называется гиперкомплексным многообразием.*

Гиперкомплексные многообразия являются кватернионным аналогом комплексных многообразий (можно также рассматривать разные кватернионные аналоги кэлеровых многообразий — гиперкэлеровы, либо HKT-многообразия, об этом речь пойдет ниже). При этом известно довольно много примеров гиперкомплексных многообразий (в отличие от гиперкэлеровых), но их теория не так хорошо разработана.

Заметим, что гиперкомплексная структура естественным образом задает действие алгебры кватернионом $\mathbb{H}$ в касательном расслоении к $M$. При этом каждый единичный чисто мнимый кватернион определяет некоторую комплексную структуру на $M$ (интегрируемость этой структуры следует из существования связности Обаты, см. следующий раздел). Таким образом, на каждом гиперкомплексном многообразии есть семейство почти-комплексных структур, параметризованное точками двумерной сферы. Напомним, что группа $GL(n, \mathbb{H})$ определяется как группа линейных преобразований пространства $\mathbb{H}^n$, коммутирующих с действием кватернионов. Отметим, что гиперкомплексная структура задает на многообразии $GL(n, \mathbb{H})$-структуру, то есть редукцию главного расслоения реперов к группе $GL(n, \mathbb{H})$, см. [43]. При этом каждое касательное пространство приобретает структуру $\mathbb{H}$-модуля. Из этого следует, что вещественная размерность гиперкомплексного многообразия кратна четырем.

Термин "гиперкомплексное многообразие" принадлежит Боеру, см. [10], и мы будем придерживаться этой терминологии, хотя в более ранних работах такие многообразия назывались иначе.

Одним из первых гиперкомплексные структуры рассматривал Обата, см. [35], [36], [37], [38]. В работах Обаты эти структуры появились как результат изучения аффинных связностей на многообразиях с почти-комплексной структурой. В работе [36] Обата изучал группу аффинных автоморфизмов связности, сохраняющей почти-комплексную структуру (то есть диффеоморфизмов многообразия, сохраняющих данную связность). В отличие от случая связности Леви-Чивита на римановом многообразии, оказалось, что эта группа не обязана сохранять заданную почти-комплексную структуру. В предположении, что голономия данного многообразия неприводима, Обата показал, что централизатор действия группы голономии может быть изоморфен либо алгебре, порожденной данной почти-комплексной структурой, либо алгебре кватернионов. В последнем случае на многообразии должна существовать вторая почти-комплексная структура, антикоммутирующая с первой. Таким образом, Обата пришел к понятию (почти-)гиперкомплексной структуры (он называл такие структуры кватернионными).

В работе [35] Обата изучал различные связности, ассоциированные с (почти-)гиперкомплексными структурами и доказал, среди прочего, что на гиперкомплексном многообразии существует и единственна связность без кручения, которая сохраняет гиперкомплексную структуру (связность Обаты).

Мы рассмотрим более подробно эту связность в следующем разделе.

В работах [37], [38] Обата изучал группы автоморфизмов гиперкомплексных структур и гиперэрмитовы метрики на гиперкомплексных многообразиях. Он доказал, в частности, что все автоморфизмы гиперкомплексных структур являются аффинными преобразованиями, а также, что гиперэрмитова метрика является гиперкэлеровой (то есть кэлеровой относительно всех комплексных структур) тогда и только тогда, когда связность Обаты совпадает со связностью Леви-Чивита.

Важные продвижения в исследовании гиперкомплексных многообразий были сделаны Соммезе в работе [50]. Он использовал другое, более жесткое, чем Обата, определение гиперкомплексной структуры. А именно, Соммезе рассматривал только те гиперкомплексные многообразия, которые локально изоморфны $\mathbb{H}^n$ и с функциями перехода, сохраняющими гиперкомплексную структуру. Это определение означает, что соответствующая $GL(n, \mathbb{H})$-структура является интегрируемой. В современной терминологии такие многообразия называются плоскими гиперкомплексными, поскольку данное условие эквивалентно занулению кривизны связности Обаты, см. [43], стр. 48.

Соммезе получил несколько интересных результатов о плоских гиперкомплексных многообразиях и сформулировал ряд открытых проблем. Он подробно исследовал геометрию твисторного семейства плоского гиперкомплексного многообразия (мы обсудим определение и свойства твисторных семейств ниже) и доказал, что оно обладает интегрируемой комплексной структурой. Соммезе показал, что общее многообразие в твисторном семействе не является алгебраическим многообразием (обобщение этого утверждения будет получено в главе 3). Кроме того, Соммезе заметил, что тотальное пространство твисторного семейства не может быть кэлеровым, и с помощью этого построил пример комплексной структуры на торе вещественной размерности 6, не допускающей кэлеровой метрики (и следовательно, не изоморфной структуре комплексного тора $\mathbb{C}^3/\Lambda$).

В упомянутой работе Соммезе [50] был поставлен вопрос о классификации гиперкомплексных многообразий вещественной размерности 4. Ответ на этот вопрос для плоских гиперкомплексных многообразий был получен Като [31]. Такими многообразиями оказались комплексный двумерный тор и некоторые поверхности Хопфа. Напомним, что поверхность Хопфа — это компактный фактор $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ по конечно-порожденной группе биголоморфных автоморфизмов, действующей свободно и вполне разрывно. Като приводит список таких групп, для которых соответствующая поверхность Хопфа обладает гиперкомплексной структурой. Работа Като использует весьма сложную классификацию комплексных поверхностей. Более прямое доказательство было получено Боером в работе [10]. Боер дал полную классификацию гиперкомплексных многообразий вещественной размерности 4, без предположения о том, что гиперкомплексная структура должна быть плоской. При этом список Като пополнился $K3$-поверхностями — единственными неприводимыми гиперкэлеровыми многообразиями вещественной размерности 4.

Плоские гиперкомплексные структуры в вещественной размерности 8 рассматривались в работе [66], где был получен список факторов восьмимерного тора, обладающих гиперкомплексной структурой (оказалось, что существует 12 неизоморфных факторов). В целом же, вопрос о классификации гиперкомплексных многообразий вещественной размерности 8 на сегодняшний день представляется широко открытым (ответ неизвестен даже в случае гиперкэлеровых многообразий).

В работе [43] Саламон рассматривал гиперкомплексные многообразия с точки зрения общей теории $G$-структур. При этом гиперкомплексные многообразия оказываются в некоторой степени похожими на кватернионно-кэлеровы многообразия, то есть на римановы многообразия, связность Леви-Чивита которых имеет голономию $Sp(n)\cdot Sp(1)$, см. по этому поводу работу Саламона [42]. Саламон изучал разложение различных естественных расслоений гиперкомплексного многообразия на неприводимые относительно структурной группы компоненты, в частности он исследовал структуру тензора кривизны связности Обаты.

С появлением теории струн гиперкомплексные многообразия стали интересны для математической физики, поскольку соответствующие $\sigma$-модели обладают интересными суперсимметриями, см. [17]. После работы Строминге-ра [52], суперсимметричные $\sigma$-модели, ассоциированные с некэлеровыми пространствами, стали популярным объектом для изучения. Стромингер также предложил использовать связности с антисимметричным кручением в этих моделях. В математике такие связности рассматривались Бисмутом [9] при изучении локальной формулы индекса. Связности Бисмута на гиперкомплексных многообразиях изучались Хове и Пападопулосом в серии работ, начиная с [26]. Это привело к открытию HKT-метрик, которые мы обсудим позднее.

Интерес к гиперкомплексным многообразиям существенно возрос после появления работы [51], в которой была описана конструкция однородных гиперкомплексных структур на компактных группах Ли. Эта конструкция была формализована в работе Джойса [29]. Джойс построил левоинвариантные гиперкомплексные структуры на всех компактных группах Ли, умноженных на тор подходящей размерности. В основе этой конструкции лежит наблюдение Самельсона [44] о том, что выбор поляризации системы корней вещественной полупростой четномерной группы Ли и выбор комплексной структуры на максимальном торе определяют на этой группе интегрируемую левоинвариантную почти-комплексную структуру. Конструкция Джойса также применима к некоторым однородным пространствам, см. [29], теорема 4.4. В главе 2 мы изучим некоторые свойства гиперкомплексной структуры Джойса на группе $SU(3)$.

Вопрос единственности левоинвариантных гиперкомплексных структур на однородных пространствах компактных групп Ли изучался в работе [6]. Было показано, что все эти структуры получаются из конструкции Джойса, при условии, что на однородном пространстве существует гиперэрмитова метрика, обладающая некоторыми естественными свойствами.

Один возможный способ построения новых примеров гиперкомплексных многообразий был описан Джойсом в работе [28]. Это конструкция гиперкомплексной редукции, аналогичная симплектической редукции Марсдена-Вайнштейна. Для гиперкомплексного многообразия с действием компактной группы Ли Джойс определяет аналог отображения моментов. При некоторых условиях фактор прообраза нуля для этого отображения по действию группы также обладает гиперкомплексной структурой, см. [28], лемма 3.2.

Отметим также некоторые другие известные примеры компактных гиперкомплексных многообразий. В работах Боера, Галицкого и Манна [12], [13], [11] были построены гиперкомплексные структуры на некоторых многообразиях Штифеля (а именно на многообразиях унитарных 2-фреймов в $\mathbb{C}^n$). Интересно заметить, что не все из этих гиперкомплексных структур являются однородными. Исследовалась также связь этой конструкции с 3-сасакиевой геометрией. Другую серию примеров составляют гиперкомплексные структуры на нильмногообразиях, см. [4]. Напомним, что нильмногообразие — это фактор нильпотентной группы Ли по дискретной кокомпактной подгруппе. Идея, используемая при построении гиперкомплексных структур на нильмногообразиях полностью аналогична той, что используется в конструкции Джойса для компактных группах Ли.

Для гиперкомплексных структур можно построить теорию деформаций, аналогичную теории деформаций компактных комплексных многообразий. По гиперкомплексной структуре можно построить комплексное многообразие — пространство твисторов — с голоморфной субмерсией в $\mathbb{C}P^1$ и вещественной структурой, согласованной с антиподальной инволюцией на $\mathbb{C}P^1$ (более подробно пространство твисторов будет обсуждаться в главе 3). Тогда деформация гиперкомплексной структуры задается деформацией пространства твисторов, которая сохраняет отображение в $\mathbb{C}P^1$ и вещественную структуру. Этот подход рассматривался в работе [39]. В работах [40] и [20] было рассмотрено много примеров применения данного подхода к различным классам гиперкомплексных многообразий. В частности, были найдены размерности пространств деформаций для гиперкомплексных компактных групп Ли и некоторых нильмногообразий.

## 1.2. Связность Обаты

Пусть $(M, I, J, K)$ – гиперкомплексное многообразие, $\nabla$ — аффинная связность на нем. Напомним, что кручение связности $\nabla$ — это тензор $T \in \Lambda^2 M \otimes TM$, определяемый формулой $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ для любых векторных полей $X, Y \in TM$. Будем говорить, что связность $\nabla$ сохраняет гиперкомплексную структуру, если $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$. В работе [35] Обата доказал следующее утверждение.

**Теорема 1.2.1** (Обата). *На гиперкомплексном многообразии* $(M, I, J, K)$ *существует единственная связность* $\nabla$*, сохраняющая гиперкомплексную структуру и имеющая нулевое кручение.*

Эта связность называется связностью Обаты. Теорему Обаты можно легко доказать, используя общую теорию $G$-структур: прямое вычисление показывает, что на гиперкомплексном многообразии внутреннее кручение $GL(n, \mathbb{H})$-структуры равно нулю (поэтому существует связность без кручения), и первое продолжение $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})^{(1)}$ также равно нулю (поэтому связность единственна), см. [43], стр. 48. В главе 2 мы получим явную формулу для связности Обаты. Мы покажем, что если рассматривать касательное расслоение на гиперкомплексном многообразии как голоморфное расслоение относительно одной из комплексных структур, то $(0, 1)$-часть связности Обаты совпадает с оператором голоморфной структуры, а $(1, 0)$-часть выражается через другую комплексную структуру, см. 2.1.1.

Напомним определение группы голономии аффинной связности $\nabla$ на многообразии $M$. Зафиксируем точку $x \in M$ и рассмотрим замкнутую петлю

$\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Параллельный перенос вдоль $\gamma$ определяет линейный оператор $g_\gamma \in GL(T_xM)$. Группа, порожденная всеми такими операторами называется группой голономии связности $\nabla$, будем обозначать ее $\mathrm{Hol}(\nabla)$. Эта группа определена однозначно с точностью до сопряжения как подгруппа в $GL(n,\mathbb{R})$, где $n$ — размерность многообразия. Компонента связности единицы, обозначаемая $\mathrm{Hol}^0(\nabla)$, является подгруппой Ли в $GL(n,\mathbb{R})$. Будем обозначать ее алгебру Ли через $\mathfrak{hol}(\nabla)$. Будем говорить, что голономия является неприводимой, если ее тавтологическое представление, задаваемое вложением в $GL(n,\mathbb{R})$, неприводимо. Подробнее о свойствах групп голономии см. [8], глава 10.

В дальнейшем нам потребуется следующий результат, который связывает группу голономии связности $\nabla$ и ее кривизну $R \in \Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(TM)$ (напомним определение кривизны: $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$).

**Теорема 1.2.2** (Амброз-Зингер, [8], теорема 10.58)**.** *Алгебра $\mathfrak{hol}(\nabla)$, как подалгебра в $\mathfrak{gl}(T_xM)$, порождена эндоморфизмами, которые получаются как параллельные переносы вдоль всевозможных путей, идущих из произвольных точек $p \in M$ в точку $x$, операторов кривизны $R_p(X,Y)$, где $X,Y \in T_pM$ — произвольные касательные векторы.*

Если $\nabla$ — связность Обаты на гиперкомплексном многообразии, то $\mathrm{Hol}(\nabla) \subset GL(n,\mathbb{H})$, так как $\nabla$ сохраняет гиперкомплексную структуру. Связность Обаты является незаменимым инструментом для исследования гиперкомплексных многообразий. Однако, даже в простейших примерах инварианты связности Обаты, такие как ее группа голономии, до сих пор не вычислены. Если $(M,I,J,K)$ допускает гиперкэлерову метрику, то связность Обаты совпадает со связностью Леви-Чивита гиперкэлеровой метрики, и ее голономия является подгруппой в $Sp(n)$. Верно и обратное: если на многообразии есть связность без кручения с голономией, содержащейся в $Sp(n)$, то это связность Леви-Чивита для некоторой гиперкэлеровой метрики.

Вопрос о том, какие группы могут встречаться в качестве групп голономии аффинных связностей без кручения является одним из важнейших в дифференциальной геометрии. При классификации групп голономии естественно ограничиться случаем, когда представление голономии неприводимо. Для специального класса многообразий — симметрических пространств — ответ на этот вопрос был получен Эли Картаном, см. [8], раздел 10.G. Ответ следует из классификации неприводимых симметрических пространств. Напомним, что такое пространство представляет собой фактор $G/H$ связной группы Ли $G$ по подгруппе $H$, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям, см. [8], теорема 10.72. Голономия естественной связности на таком многообразии равна $H$ (действие в касательном пространстве задается присоединенным представлением). Список возможных пар $(G, H)$ можно найти в конце главы 10 в [8].

Для многообразий, не являющихся симметрическими пространствами, существенное продвижение в вопросе классификации было сделано Берже в [7]. Берже получил список неприводимых метрических голономий (то есть голономий связностей, сохраняющих некоторую невырожденную симметрическую билинейную форму), а также часть списка возможных неметрических голономий. Работа Берже полностью завершила классификацию групп голономии метрических связностей на римановых многообразиях. Одним из важнейших наблюдений Берже являлось то, что группа голономии неприводимой метрической связности действует транзитивно на единичной сфере в касательном пространстве, если рассматриваемое многообразие не является симметрическим пространством. Прямое доказательство этого факта, не использующее классификацию, было позже получено Саймонсом [46].

Для случая неметрических голономий многообразий, не являющихся симметрическими пространствами, классификация была завершена в 1999-м году, в работах Меркулова и Швахофера [34], [33]. Идею, использованную в этих работах, можно рассматривать как некоторое обобщение подхода Саймонса [46]: вместо действия группы голономии на единичной сфере нужно рассмотреть проективизацию орбиты старшего вектора в комплексификации представления голономии. Оказывается, что для неприводимого представления голономии многообразия, не являющегося симметрическим, проективизация этой орбиты должна быть компактным эрмитовым симметрическим пространством.

Таким образом, сейчас известен полный список групп, которые могут быть неприводимыми группами голономии связностей без кручения, не являющихся симметрическими. Помимо самой группы $GL(n, \mathbb{H})$ в списке неприводимых голономий встречаются некоторые ее подгруппы, а именно $Sp(n)$ и $SL(n, \mathbb{H})$. Для каждой из этих подгрупп известны примеры компактных многообразий со связностями, голономии которых содержатся в этих подгруппах. Для $Sp(n)$ это гиперкэлеровы многообразия, а для $SL(n, \mathbb{H})$ это, например, нильмногообразия, см. [4]. В главе 2 мы покажем, что на группе $SU(3)$ с гиперкомплексной структурой, построенной Джойсом в [29], голономия связности Обаты совпадает с $GL(2, \mathbb{H})$.

Рассмотрим более подробно многообразия с голономией, содержащейся в $SL(n, \mathbb{H})$. Напомним определение этой группы. Пусть $(V, I, J, K)$ — кватернионное векторное пространство вещественной размерности $4n$. Группа $GL(n, \mathbb{H})$ состоит из линейных преобразований пространства $V$, которые коммутируют с $I, J$ и $K$. Рассмотрим разложение Ходжа $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_I^{1,0} \oplus V_I^{0,1}$, где $V_I^{1,0}$ и $V_I^{0,1}$ — собственные подпространства оператора $I$, соответствующие собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$. Пусть $\Lambda_I^{2n,0} V = \Lambda^{2n}(V_I^{1,0})$. Тогда $SL(n, \mathbb{H})$ — это подгруппа, состоящая из тех элементов $GL(n, \mathbb{H})$, которые действуют тождественно на $\Lambda_I^{2n,0} V$.

**Определение 1.2.3.** *Если группа голономии* $\mathrm{Hol}(\nabla)$ *связности Обаты на гиперкомплексном многообразии* $M$ *содержится в* $SL(n, \mathbb{H})$*, то будем говорить, что* $M$ *является* $SL(n, \mathbb{H})$*-многообразием.*

Для любого $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия связность Обаты, индуцированная на каноническом расслоении $K(M,I) = \Lambda^{2n,0}(M,I)$, сохраняет ненулевое сечение. Из этого следует, что $K(M,I)$ является тривиальным как голоморфное расслоение (см. [60]). В присутствии HKT-метрики верно и обратное: любое компактное гиперкомплексное многообразие с тривиальным каноническим расслоением $K(M,I)$ и с HKT-метрикой удовлетворяет условию $\mathrm{Hol}(\nabla) \subset SL(n,\mathbb{H})$. Это утверждение доказано в [60] с использованием теории Ходжа для HKT-многообразий, построенной в [56]. В последней работе показано, как для $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия с HKT-метрикой построить аналог ходжева разложения для когомологий структурного пучка $H^*(\mathcal{O}_{(M,I)})$. Отметим, что во всех известных на сегодняшний день примерах у $SL(n,\mathbb{H})$-многообразий группа голономии является собственной подгруппой в $SL(n,\mathbb{H})$.

*Пример* 1.2.4. Пусть $G$ — связная односвязная нильпотентная группа Ли, $\Gamma \subset G$ — дискретная кокомпактная подгруппа. Фактор-многообразие $N = \Gamma\backslash G$ называется нильмногообразием. Предположим, что $I, J, K$ являются левоинвариантными комплексными структурами на $G$ и удовлетворяют кватернионным соотношениям. Тогда гиперкомплексная структура спускается на $N$ и мы называем $N$ гиперкомплексным нильмногообразием. Как было показано в [4], любое гиперкомплексное нильмногообразие является $SL(n,\mathbb{H})$-многообразием.

*Пример* 1.2.5. Другой пример $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия принадлежит Свану. Этот пример представляет собой расслоение на комплексные торы над гиперкэлеровой базой, см. [53]. Пусть $(X, I, J, K)$ — гиперкэлерово многообразие. 2-форма $\alpha \in \Lambda^2 X$ называется антиавтодуальной, если она имеет тип (1,1) по отношению к любой индуцированной комплексной структуре. Если $\alpha$ представляет целочисленный класс когомологий, то она определяет главное $U(1)$-расслоение над $X$. Если заданы $4k$ таких форм, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{4k}$, то мы получаем главное $T^{4k}$-расслоение $\pi\colon M \to X$. Это расслоение допускает инстантонную связность $A$, задаваемую 1-формами $\theta_i \in \Lambda^1 M$, такими что $d\theta_i = \pi^*(\alpha_i)$. Гиперкомплексная структура на $M$ определяется следующим образом: на горизонтальных подпространствах связности $A$ действие кватернионов поднимается с $X$, а на вертикальных подпространствах оно дается плоской гиперкомплексной структурой на $4k$-мерном торе. Из этой конструкции ясно, что $M$ является $SL(n, \mathbb{H})$-многообразием.

Рассмотрим многообразие Хопфа $H = (\mathbb{H}^n \backslash 0)/\langle A \rangle$, где образующая $A$ — кватернионная матрица с собственными значениями, которые по модулю больше единицы. Гиперкомплексная структура на $H$ индуцирована стандартной гиперкомплексной структурой на $\mathbb{H}^n$, но $H$ не является $SL(n, \mathbb{H})$-многообразием. Действительно, группа голономии связности Обаты на $H$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и действие на $TM$ задается матрицей $A$, определитель которой больше единицы.

Из формулы присоединения следует, что ни одна из однородных гиперкомплексных структур, построенных Джойсом в [29] не является $SL(n, \mathbb{H})$-структурой. Действительно, все эти многообразия являются расслоениями над рациональными однородными пространствами со слоем комплексный тор, поэтому они имеют нетривиальное каноническое расслоение, в отличие от $SL(n, \mathbb{H})$-многообразий.

## 1.3. HKT-многообразия

Далее, мы напомним определение HKT-метрики. Пусть $(M, I, J, K)$ — гиперкомплексное многообразие и $g$ — кватернионно-эрмитова метрика на нем. Рассмотрим эрмитовы формы:

$$\omega_I(X,Y) = g(IX,Y), \quad \omega_J(X,Y) = g(JX,Y), \quad \omega_K(X,Y) = g(KX,Y).$$

Если любые две из этих форм замкнуты, то многообразие гиперкэлерово. Обозначим $\Omega_I = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$. Легко проверить, что $\Omega_I \in \Lambda^{2,0}_I M$.

**Определение 1.3.1.** *Метрика $g$ называется HKT-метрикой (hyperkähler with torsion, гиперкэлерова с кручением), если $\partial\Omega_I = 0$. В этом случае форма $\Omega_I$ называется HKT-формой, а $(M, I, J, K, g)$ — HKT-многообразием.*

HKT-метрики были введены Хове и Пападопулосом в [26] (см. также [21]) и активно изучались после этого. Существование HKT-метрики накладывает существенные ограничения на глобальную геометрию гиперкомплексного многообразия ([16], [4]).

После работы [21] стало ясно, как важны HKT-метрики при изучении гиперкомплексных многообразий. В этой работе была показана связь между HKT-метриками и связностями с кососимметрическим кручением. Напомним (см. [9]), что если $(M, I, g)$ — эрмитово многообразие, то на нем существует и единственна связность, сохраняющая $I$ и $g$, у которой кручение антисимметрично (то есть $g(X, T(Y, Z))$ антисимметрично по $X$, $Y$, $Z$ и задает 3-форму, где $T$ — кручение связности). Эта связность называется связностью Бисмута. Гранчаров и Пун доказали, что на гиперкомплексном многообразии $(M, I, J, K)$ существует HKT-метрика тогда и только тогда, когда $Id\omega_I = Jd\omega_J = Kd\omega_k$; кроме того, в этом случае связности Бисмута для трех эрмитовых структур совпадают.

HKT-метрики имеют много общего с кэлеровыми метриками — они локально задаются потенциалом (см. [2]) и могут быть использованы для получения некоторых ограничений на когомологии многообразия.

В работе [56] Вербицкий развил теорию Ходжа для многообразий с HKT-метрикой, которая оказалась весьма полезной для исследования гиперкомплексных многообразий. В качестве иллюстрации использования HKT-метрик, приведем следующий результат, полученный в работе [59]. Предположим, что дано гиперкомплексное многообразие $(M, I, J, K)$, причем $(M, I)$ является комплексным многообразием, допускающим кэлерову метрику. Тогда $(M, I)$ допускает гиперкэлерову метрику. Идея доказательства состоит в том, что любая кэлерова метрика на $(M, I)$ дает HKT-метрику на $(M, I, J, K)$, а это позволяет применить теорию Ходжа.

Упомянем также работу [27], где было показано, что на HKT-многообразии голономия связности Обаты содержится в $SL(n, \mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда форма Ли соответствующей гиперэрмитовой структуры точна. Форма Ли — это 1-форма, определяемая как $\theta = I\delta\Omega_I$, где $\delta$ — оператор, сопряженный дифференциалу де Рама.

Известно, что HKT-метрики существуют на многих гиперкомплексных многообразиях. К ним относятся, в частности, компактные группы Ли с гиперкомплексными структурами Джойса (на которых HKT-метрика задается формой Киллинга), а также некоторые нильмногообразия (см. [4]). Обзор результатов, связанных с HKT-метриками на нильмногообразиях можно найти в [3]. Другие конструкции HKT-метрик появлялись в работе [5], где рассматривались кватернионные представления алгебр Ли, в работе [57], где изучались HKT-многообразия, получаемые из гиперголоморфных расслоений, в работе [19], где была рассмотрена конструкция гиперкомплексной HKT-редукции.

Необходимо отметить, что не все гиперкомплексные многообразия допускают HKT-метрику. Примеры многообразий, не допускающих такой метрики, можно найти в [3]. Кроме того, мы построим такие примеры в главе 4.

## 1.4. Калибрации

Рассмотрим риманово многообразие $M$. В главах 3 и 4 для нас будут важны дифференциальные формы на $M$, обладающие некоторыми специальными свойствами. Дадим следующее определение.

**Определение 1.4.1.** *Калибрацией (calibration) на $M$ называется такая замкнутая дифференциальная $k$-форма $\eta$, что $\eta(X_1 \wedge \ldots \wedge X_k) \leq 1$ для каждого* *разложимого поливектора $X_1 \wedge \ldots \wedge X_k \in \Lambda^k(TM)$ единичной длины (относительно римановой метрики).*

Калибрации интересны прежде всего тем, что определяют некоторый специальный класс подмногообразий в $M$:

**Определение 1.4.2.** *Пусть $\eta$ — калибрация на $M$. Ориентированное подпространство $V \subset T_xM$ размерности $k$ называется калиброванным, если риманова форма объема на $V$ равна $\eta|_V$. Подмногообразие (возможно, с особенностями) $Z \subset M$ размерности $k$ называется калиброванным, если его особенности имеют хаусдорфову коразмерность $\geq 1$, а для всех гладких точек $z \in Z$ касательные пространства $T_zZ \subset T_zM$ калиброваны.*

Теория калибраций имеет долгую историю, которая начинается с работ Харви и Лоусона (см. [24]). Важным свойством калиброванных подмногообразий (свойством, которое было одной из мотиваций для введения этого понятия) является то, что эти подмногообразия являются минимальными. В частности, если калиброванное подмногообразие замкнуто и компактно, то его объем минимален в соответствующем классе гомологий.

Теория калибраций тесно связана с теорией многообразий со специальной голономией (подробнее про эту связь см. часть 1 книги [23]). А именно, если группа голономии риманова многообразия равна $G \subset GL(n, \mathbb{R})$, и у $G$ есть инвариантная $k$-форма (то есть инвариантный элемент $k$-й внешней степени представления, двойственного тавтологическому), то по ней можно построить параллельную $k$-форму на римановом многообразии. Несложно убедиться в том, что после домножения на подходящую константу такая форма становится калибрацией (замкнутость следует из того, что форма параллельна). Приведем несколько примеров широко известных калибраций, получаемых таким способом.

На многообразиях с голономией $U(n)$, то есть на кэлеровых многообразиях, семейство калибраций дается степенями кэлеровой формы $\omega^k/k!$ (утверждение о том, что эти формы являются калибрациями обычно называют неравенствами Виртингера). Соответствующие калиброванные подмногообразия — это комплексные подмногообразия.

На многообразиях с голономией $SU(n)$ есть еще одна калибрация — это вещественная часть голоморфной формы объема. Соответствующие ей калиброванные подмногообразия называются специальными лагранжевыми.

На многообразиях с голономией $G_2$ существуют канонические 3-форма и двойственная ей 4-форма. Они являются калибрациями, а калиброванные подмногообразия называются ассоциативными и коассоциативными.

В работе [22] было построено несколько семейств калибраций на гиперкэлеровых многообразиях. Пусть $(M, I, J, K)$ — гиперкэлерово многообразие, а $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ — кэлеровы формы. Эти формы порождают некоторую коммутативную подалгебру в $\Lambda^*(M)$ (некоторые результаты об этой подалгебре можно найти в работах [22] и [54]). В [22] Гранчаров и Вербицкий строят новые калибрации, которые являются полиномами от $\omega_I, \omega_J, \omega_K$.

Рассмотрим более подробно одну из калибраций, построенных в этой работе. Рассмотрим $SL(n, \mathbb{H})$-многообразие $(M, I, J, K)$ и обозначим через $\Phi_J \in \Lambda^{2n,0}(M, J)$ сечение канонического расслоения многообразия $(M, J)$, параллельное относительно связности Обаты (такое сечение всегда можно выбрать, см. [60]). Так как комплексные структуры $I$ и $J$ антикоммутируют, то $I(\Phi_J)$ является сечением $\Lambda^{0,2n}(M, J)$, и поэтому удовлетворяет соотношению $I(\Phi_J) = \alpha\bar{\Phi}_J$ для некоторого комплексного числа $\alpha$, по модулю равного единице. Домножая $\Phi_J$ на константу, мы всегда можем добиться того, чтобы $I(\Phi_J) = \bar{\Phi}_J$. Обозначим $\Psi = \frac{1}{n!}(\Re\Phi_J)^{n,n}_I$ дифференциальную форму, являющуюся $(n, n)$-компонентой $\Phi_J$ относительно комплексной структуры $I$. В работе [22] было показано, что $\Psi$ является калибрацией для любой такой кватернионно-эрмитовой метрика, что выполнено соотношение $|\Phi_J| = 1$. Соответствующие калиброванные подмногообразия имеют следующее описание ([22], предложение 5.1):

**Теорема 1.4.3.** *Пусть* $(M, I, J, K)$ — $SL(n, \mathbb{H})$*-многообразие,* $X \subset M$ — *его подмногообразие, и* $\Psi \in \Lambda^{n,n}(M, I)$ — *калибрация, определенная выше. Рассмотрим кватернионно-эрмитову метрику* $h$ *на* $(M, I, J, K)$*, и пусть* $\Omega := \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$ — *соответствующая (2,0)-форма, построенная по* $h$ *(см. 1.3.1). Тогда следующие условия эквивалентны:*

**(i)** $X$ *калибровано относительно* $\Psi$*.*

**(i)** $X \subset (M, I)$ *является комплексным подмногообразием, лагранжевым относительно* $\Omega$*.*

**Определение 1.4.4.** *Пусть* $(M, I, J, K)$ — $SL(n, \mathbb{H})$*-многообразие,* $X \subset (M, I)$ — *комплексное подмногообразие. Будем называть* $X$ *голоморфным лагранжевым подмногообразием, если оно калибровано относительно* $\Psi$*.*

Заметим, что определение голоморфного лагранжева подмногообразия не требует выбора голоморфной симплектической формы. Точнее, такое подмногообразие будет лагранжевым (в обычном смысле) относительно любой $(2, 0)$-формы $\Omega := \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$, ассоциированной с кватернионно-эрмитовой метрикой. Голоморфные лагранжевы подмногообразия будут рассматриваться в главе 3 и в главе 4.

# Глава 2

# Голономия связности Обаты на группе $SU(3)$

В этой главе мы изучаем левоинвариантную гиперкомплексную структуру на группе Ли $SU(3)$, построенную Джойсом в работе [29]. В частности, мы изучаем голономию связности Обаты (определение см. в разделе 1.2) на этом многообразии. Гиперкомплексные структуры, построенные Джойсом дают пример гиперкомплексных многообразий с нетривиальным каноническим расслоением. Следовательно, голономия связности Обаты на таких многообразиях не является подгруппой в $SL(n, \mathbb{H})$. Мы покажем, что голономия связности Обаты на $SU(3)$ является неприводимой. Используя классификацию неприводимых групп голономии, полученную Меркуловым и Швахофером в [34] и [33], мы докажем, что группа голономии совпадает с $GL(2, \mathbb{H})$ (теорема 2.3.8). Это дает первый известный пример компактного гиперкомплексного многообразия с такой группой голономии. Результаты, представленные в этой главе, опубликованы в работе [47].

В разделе 2.1 мы изучим некоторые свойства связности Обаты, которые будут важны для дальнейшего. В разделе 2.2 мы опишем конструкцию гиперкомплексных структур на группах Ли, следуя работе Джойса [29]. В разделе 2.3 мы рассмотрим связность Обаты на группе $SU(3)$ и докажем основную теорему.

## 2.1. Голоморфное касательное расслоение и связность Обаты

Рассмотрим гиперкомплексное многообразие $(M, I, J, K)$. Определение и основные свойства гиперкомплексных многообразий см. в разделе 1.1. Напомним, что на $M$ существует единственная связность без кручения $\nabla$, которая сохраняет гиперкомплексную структуру, то есть

$$\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0.$$

Эта связность называется связностью Обаты.

Рассмотрим разложение комплексифицированного касательного расслоения многообразия $M$ в прямую сумму собственных подрасслоений для $I$:

$$T_{\mathbb{C}}M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T_I^{1,0}M \oplus T_I^{0,1}M,$$

где $T_I^{1,0}M = \{X \in T_{\mathbb{C}}M \colon IX = \sqrt{-1}X\}$, $T_I^{0,1}M = \{X \in T_{\mathbb{C}}M \colon IX = -\sqrt{-1}X\}$.

Поскольку комплексная структура $I$ антикоммутирует с $J$, то последняя переставляет собственные подрасслоения для $I$:

$$J \colon T_I^{1,0}M \to T_I^{0,1}M, \qquad J \colon T_I^{0,1}M \to T_I^{1,0}M.$$

Напомним, что расслоение $T_I^{1,0}M$ можно наделить голоморфной структурой, которая задается дифференциальным оператором

$$\overline{\partial} \colon \Gamma(T_I^{1,0}M) \to \Omega_I^{0,1}M \otimes \Gamma(T_I^{1,0}M),$$

где $\Omega_I^{0,1}M$ — пространство $(0,1)$-форм относительно $I$. Аналогично, $T_I^{0,1}M$ можно наделить антиголоморфной структурой

$$\partial \colon \Gamma(T_I^{0,1}M) \to \Omega_I^{1,0}M \otimes \Gamma(T_I^{0,1}M).$$

Мы будем отождествлять комплексное расслоение $(TM, I)$ с $T_I^{1,0}M$ посредством изоморфизма

$$X \mapsto \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}IX). \tag{2.1.1}$$

Так как $\nabla$ сохраняет $I$, этот изоморфизм позволяет рассматривать связность Обаты как связность в расслоении $T_I^{1,0}M$. С этой точки зрения связность Обаты $\nabla$ имеет особенно простое описание.

**Предложение 2.1.1.** *Пусть* $(M, I, J, K)$ *– гиперкомплексное многообразие,* $\dim_{\mathbb{R}} M = 4n$.

1. *Связность Обаты* $\nabla\colon \Gamma(T_I^{1,0}M) \to \Omega_{\mathbb{C}} M \otimes \Gamma(T_I^{1,0}M)$ *определяется формулой*
$$\nabla = \overline{\partial} - J\,\partial\, J. \tag{2.1.2}$$

2. *Кривизна связности Обаты является* $SU(2)$*-инвариантной два-формой с коэффициентами в* $\mathrm{End}_{\mathbb{H}}(TM)$, *где* $SU(2)$ *рассматривается как группа единичных кватернионов:*
$$R(IX, IY)Z = R(JX, JY)Z = R(KX, KY)Z = R(X, Y)Z.$$

*Доказательство.* Ясно, что формула (2.1.2) определяет связность на расслоении $T_I^{1,0}M$. Заметим, что при отождествлении (2.1.1) эндоморфизм $J$ вещественного касательного расслоения переходит в комплексно-антилинейный оператор $A\colon T_I^{1,0}M \to T_I^{1,0}M$, $AX = J\overline{X}$. Следующее вычисление показывает, что $\nabla$ сохраняет $A$:

$$\begin{aligned}
(\nabla A)X &= \nabla(AX) - A\nabla X\\
&= \overline{\partial} J\overline{X} - J\,\partial\, J^2\overline{X} - J\left(\overline{\overline{\partial} X}\right) + J\left(\overline{J\,\partial\, JX}\right)\\
&= \overline{\partial} J\overline{X} + J\,\partial\overline{X} - J\,\partial\overline{X} - \overline{\partial}(\overline{JX}) = 0.
\end{aligned}$$

Это доказывает, что $\nabla$ сохраняет гиперкомплексную структуру.

Остается проверить, что соответствующая связность на $TM$ не имеет кручения. Выберем локальные векторные поля $e_i = \frac{1}{2}(\xi_i - \sqrt{-1}I\xi_i), i = 1, \ldots, 2n$, образующие голоморфный базис расслоения $T_I^{1,0}M$ и такие, что $\xi_i$ – это попарно коммутирующие вещественные векторные поля. Нам нужно доказать, что $\nabla_{\xi_i}\xi_j = \nabla_{\xi_j}\xi_i$ и $\nabla_{I\xi_i}\xi_j = \nabla_{\xi_j}I\xi_i$ для всех $i, j = 1, \ldots, 2n$. Заметим, что в силу изоморфизма (2.1.1) справедливы соотношения

$$\nabla_{\xi_i}\xi_j = \nabla_{\xi_i}e_j = \nabla^{1,0}_{e_i}e_j,$$

так как $\nabla^{0,1} e_j = \overline{\partial} e_j = 0$. Поэтому достаточно доказать, что $\nabla^{1,0}_{e_i} e_j = \nabla^{1,0}_{e_j} e_i$. Это, в свою очередь, эквивалентно $\partial_{e_i} J e_j = \partial_{e_j} J e_i$ согласно (2.1.2).

Рассмотрим векторные поля

$$f_i = e_i - \sqrt{-1} J e_i \in T^{1,0}_J M.$$

Эти векторные поля имеют тип $(1,0)$ относительно $J$. Почти-комплексная структура $J$ интегрируема, поэтому $[f_i, f_j] \in T^{1,0}_J M$. Мы утверждаем, что $[f_i, f_j]$ также содержится в $T^{0,1}_I M$. Проверим это. Начнем с соотношения

$$[f_i, f_j] = -[Je_i, Je_j] - \sqrt{-1}([Je_i, e_j] + [e_i, Je_j]).$$

Поскольку $Je_i \in T^{0,1}_I M$, имеем $[Je_i, Je_j] \in T^{0,1}_I M$; кроме того, так как векторные поля $e_i$ голоморфны, то $[Je_i, e_j] = -\partial_{e_j} J e_i \in T^{0,1}_I M$ и $[e_i, Je_j] = \partial_{e_i} J e_j \in T^{0,1}_I M$, откуда и следует утверждение.

Итак, мы доказали, что $[f_i, f_j] \in T^{0,1}_I M \cap T^{1,0}_J M$. Но операторы $I$ и $J$ антикоммутируют, поэтому пересечение их собственных подпространств тривиально. Мы заключаем, что $[e_i - \sqrt{-1} J e_i, e_j - \sqrt{-1} J e_j] = 0$. Аналогично, $[e_i + \sqrt{-1} J e_i, e_j + \sqrt{-1} J e_j] = 0$. Из двух последних тождеств следует, что $\partial_{e_i} J e_j - \partial_{e_j} J e_i = [e_i, Je_j] - [e_j, Je_i] = 0$. Это доказывает, что связность, определенная формулой (2.1.2) не имеет кручения. По теореме Обаты связность без кручения, сохраняющая гиперкомплексную структуру единственна, поэтому она должна совпадать с (2.1.2).

Для доказательства второй части заметим, что по формуле (2.1.2) $\nabla^{1,0} = -J\,\partial\,J$, $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$ и так как $\overline{\partial}^2 = 0$, $\partial^2 = 0$, $J^2 = -Id$ мы имеем $\left(\nabla^{0,1}\right)^2 = 0$, $\left(\nabla^{1,0}\right)^2 = 0$. Мы видим, что $(0,1)$-часть связности Обаты совпадает с оператором голоморфной структуры, как и у связности Черна. Поэтому стандартное рассуждение, обычно применяемое к связности Черна, работает и в нашем случае, доказывая что кривизна $R$ связности Обаты содержится в $\Lambda^{1,1}_I M \otimes \mathrm{End}(T^{1,0}_I M)$. Из этого следует, что $R(IX, IY)Z = R(X,Y)Z$. Теперь заметим, что комплексная структура $I$ была выбрана произвольно, и все предыдущие рассуждения применимы к любой другой комплексной структуре из всего семейства, задающего гиперкомплексную структуру на $M$. Поэтому мы можем заменить $I$ на $J$ или $K$ и получим аналогичные соотношения: $R(JX, JY)Z = R(KX, KY)Z = R(X, Y)Z$. Наконец, для любых векторных полей $X$ и $Y$ эндоморфизм $R(X, Y)$ является $\mathbb{H}$-линейным, поскольку связность Обаты сохраняет гиперкомплексную структуру. Это завершает доказательство. □

При изучении гиперкомплексных структур на группах Ли нам будет удобно использовать другое выражение для связности Обаты. Это выражение будет содержать только коммутаторы вещественных векторных полей и действие комплексных структур. Для того, чтобы его вывести, мы воспользуемся следующий формулой для оператора голоморфной структуры (см. [18], где этот оператор записан аналогичным образом).

**Предложение 2.1.2.** *Пусть $M$ – гладкое многообразие, а $I$ – комплексная структура на нем. Рассматривая $(TM, I)$ как голоморфное расслоение (используя изоморфизм (2.1.1)), мы можем записать соответствующий оператор голоморфной структуры следующим образом:*

$$\overline{\partial}_X Y = \frac{1}{2}([X, Y] + I[IX, Y]). \tag{2.1.3}$$

*Доказательство.* Ясно, что оператор, задаваемый формулой (2.1.3) является $\mathbb{R}$-линейным как по $X$ так и по $Y$. Кроме того, поскольку тензор Нийенхейса (1.1.1) для комплексной структуры $I$ равен нулю, то мы видим, что $\overline{\partial}_X(IY) = I\overline{\partial}_X Y$, то есть (2.1.3) задает $\mathbb{C}$-линейный по $Y$ оператор. Далее заметим, что этот оператор удовлетворяет тождеству Лейбница:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_X(fY) &= \frac{1}{2}([X, fY] + I[IX, fY]) \\
&= \frac{1}{2}(f([X, Y] + I[IX, Y]) + (\mathcal{L}_X f)Y + (\mathcal{L}_{IX} f)IY) \\
&= f\overline{\partial}_X Y + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_X f + \sqrt{-1}\mathcal{L}_{IX} f)Y = f\overline{\partial}_X Y + (\overline{\partial}_X f)Y,
\end{aligned}$$

и что он $C^\infty(M)$-линеен по $X$:

$$\overline{\partial}_{fX}Y = \frac{1}{2}([fX, Y] + I[fIX, Y]) = f\overline{\partial}_X Y - \frac{1}{2}(\mathcal{L}_Y f)(X + I^2 X) = f\overline{\partial}_X Y.$$

Далее мы должны показать, что (2.1.3) зануляется на голоморфных векторных полях $Y$. Как известно, векторное поле $Y$ является голоморфным сечением расслоения $(TM, I)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_Y I = 0$. Но из этого следует, что $(\mathcal{L}_Y I)(IX) = [Y, I^2 X] - I[Y, IX] = 2\overline{\partial}_X Y = 0$.

Свойства, которые мы проверили выше, однозначно задают оператор голоморфной структуры, поэтому доказательство закончено. □

Из Предложений 2.1.1 и 2.1.2 следует, что связность Обаты на гиперкомплексном многообразии $(M, I, J, K)$ можно записать в следующем виде:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\big([X, Y] + I[IX, Y] - J[X, JY] + K[IX, JY]\big). \tag{2.1.4}$$

Именно это выражение для связности Обаты будет использовано в дальнейшем.

## 2.2. Гиперкомплексные структуры на группах Ли

В этом разделе приводится конструкция однородных гиперкомплексных структур на компактных группах Ли. Мы следуем работе Джойса [29]. Пусть $G$ – компактная полупростая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ максимальную торическую подалгебру.

Первый шаг при построении гиперкомплексной структуры на $G$ состоит в том, чтобы записать следующее разложение для $\mathfrak{g}$ ([29], лемма 4.1):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \mathfrak{d}_k \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \mathfrak{f}_k.$$

Здесь $\mathfrak{b}$ – абелева подалгебра, $\mathfrak{d}_k$ – подалгебры, изоморфные $\mathfrak{su}(2)$, и $\mathfrak{f}_k$ – подпространства в $\mathfrak{g}$, обладающие следующими свойствами:

1. $[\mathfrak{d}_k, \mathfrak{b}] = 0$ и $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{k=1}^n \mathfrak{d}_k$;

2. $[\mathfrak{d}_k, \mathfrak{f}_j] = 0$ для $j > k$;

3. $[\mathfrak{d}_k, \mathfrak{f}_k] \subset \mathfrak{f}_k$, так что $\mathfrak{d}_k$ действует на $\mathfrak{f}_k$. Требуется чтобы $\mathfrak{f}_k$ было изоморфно (как $\mathfrak{su}(2)$-модуль) прямой сумме нескольких копий $\mathbb{C}^2$ со стандартным действием $\mathfrak{su}(2)$ умножением слева.

Заметим, что $\mathfrak{d}_k \oplus \mathfrak{u}(1) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$ можно отождествить с алгеброй кватернионов $\mathbb{H}$. Поскольку подалгебра $\mathfrak{b}$ изоморфна прямой сумме нескольких копий $\mathfrak{u}(1)$, мы можем (возможно, после добавления нескольких дополнительных копий $\mathfrak{u}(1)$, т.е. умножая $G$ на некоторое число окружностей $S^1$) отождествить $\mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{k=1}^n \mathfrak{d}_k$ с $\mathbb{H}^m$ для некоторого $m$. Обозначим через $\mathcal{I}_k, \mathcal{J}_k, \mathcal{K}_k$ элементы $\mathfrak{d}_k$, соответствующие стандартным мнимым кватернионам при отождествлении $\mathfrak{d}_k \oplus \mathfrak{u}(1) \simeq \mathbb{H}$. Определим три комплексных структуры $I, J, K \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ следующим образом: действие $I, J, K$ на $\mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{k=1}^n \mathfrak{d}_k \simeq \mathbb{H}^m$ задается умножением слева на соответствующий мнимый кватернион, а действие на $\mathfrak{f}_k$ определяется по формулам

$$IX = [\mathcal{I}_k, X], \qquad JX = [\mathcal{J}_k, X], \qquad KX = [\mathcal{K}_k, X]$$

для $X \in \mathfrak{f}_k$. Эндоморфизмы $I$, $J$, $K$ определяют три левоинвариантных почти-комплексных структуры на $G$. Как показал Джойс ([29], лемма 4.3), они интегрируемы и удовлетворяют кватернионным соотношениям. Это задает гиперкомплексную структуру на $G$.

Нас интересует случай $G = SU(3)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ – это алгебра косоэрмитовых матриц размера $3 \times 3$ с нулевым следом. Можно записать такую матрицу в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} D & f \\ -\overline{f}^t & b \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

где $D \in \mathfrak{u}(2)$, $f \in \mathbb{C}^2$ – вектор-столбец, а $b \in \mathbb{C}$ удовлетворяет соотношению $\mathrm{tr}(D) + b = 0$. Описанное выше разложение алгебры $\mathfrak{g}$ принимает вид $\mathfrak{g} =$

$\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{d}\oplus\mathfrak{f}$ где $\mathfrak{d}$ состоит из матриц с нулевыми $f$ и $b$, $\mathfrak{f}$ — из матриц с нулевыми $D$ и $b$, а $\mathfrak{b}$ состоит из диагональных матриц, коммутирующих с $\mathfrak{d}$. Заметим, что присоединенное действие $\mathfrak{b}$ сохраняет $\mathfrak{f}$, и что $[\mathfrak{f},\mathfrak{f}] \subset \mathfrak{b}\oplus\mathfrak{d}$. Таким образом, мы имеем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировку: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, где $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{b}\oplus\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}$.

Необходимо также отметить, что можно выбрать изоморфизм $\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{d} \simeq \mathbb{H}$, а также соответствующую гиперкомплексную структуру таким образом, что форма Киллинга будет кватернионно-эрмитовой, то есть эрмитовой относительно всех комплексных структур. Это задает на группе $G$ структуру HKT-многообразия, см. [21].

## 2.3. Голономия связности Обаты

### 2.3.1. Эйлерово векторное поле

Рассмотрим группу Ли $G = SU(3)$ с описанной выше гиперкомплексной структурой. Алгебра Ли группы $G$ является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированной: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. При этом $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$ мы будем отождествлять с алгеброй кватернионов $\mathbb{H}$, а $\mathfrak{g}_1$ будем рассматривать как $\mathfrak{g}_0$-модуль с действием $\mathbb{H}$, полученным из присоединенного действия $\mathfrak{g}_0$, как это описано в предыдущем разделе.

Мы будем рассматривать элементы алгебры $\mathfrak{g}$ как левоинвариантные векторные поля на $G$. Обозначим через $\mathcal{E}$ элемент подалгебры $\mathfrak{g}_0$ (и соответствующее векторное поле), который соответствует $-1 \in \mathbb{H}$ при изоморфизме $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathbb{H}$. Мы будем называть $\mathcal{E}$ векторным полем Эйлера.

Также выберем какой-нибудь ненулевой элемент $W \in \mathfrak{g}_1$. Тогда $\langle \mathcal{E}, W\rangle$ задают базис над $\mathbb{H}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. В этих обозначениях действие $\mathbb{H}$ на $\mathfrak{g}_1$ задается следующим образом:

$$IW = [W, I\mathcal{E}], \qquad JW = [W, J\mathcal{E}], \qquad KW = [W, K\mathcal{E}].$$

*Замечание* 2.3.1. Заметим, что подгруппа $G_0$ соответствующая подалгебре $\mathfrak{g}_0$ изоморфна группе $SU(2) \times U(1)$ и является гиперкомплексным подмногообразием в $G$. Если отождествить $\mathfrak{g}_0$ с алгеброй кватернионов $\mathbb{H}$, то гиперкомплексная структура задается кватернионным умножением слева. Из формулы (2.1.4) следует, что связность Обаты в этом случае записывается так:

$$\nabla_X Y = -Y \cdot X$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{g}_0$. Здесь $\cdot$ означает умножение в $\mathbb{H} \simeq \mathfrak{g}_0$. Легко проверить, что в этом случае связность Обаты на $G_0$ является плоской. Группа $G_0 \simeq SU(2) \times U(1)$ диффеоморфна многообразию Хопфа $(\mathbb{R}^4 \backslash \{0\})/\Gamma$, где $\Gamma$ – бесконечная циклическая группа, порожденная гомотетией $z \mapsto \lambda z$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $\lambda \neq 1$. Векторное поле на $G_0$, соответствующее $\mathcal{E} \in \mathfrak{g}_0$, поднимается до обычного поля Эйлера на $\mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$, которое порождает поток гомотетий.

Примечательно, что Эйлерово векторное поле $\mathcal{E}$ на $SU(3)$ обладает некоторыми полезными свойствами, как будет показано в следующем предложении. Отметим, что поле $\mathcal{E}$ уже встречалось в работе [41], хотя наши обозначения немного отличаются от обозначений в этой статье.

**Предложение 2.3.2.** *Векторное поле $\mathcal{E}$ обладает следующими свойствами:*

1. *$\mathcal{E}$ голоморфно относительно $I$, $J$, $K$;*
2. *$\nabla \mathcal{E} = Id$, где $Id$ рассматривается как сечение расслоения $\Lambda^1 G \otimes TG \simeq \mathrm{End}(TG)$;*
3. *$\nabla^2 \mathcal{E} = 0$;*
4. *Если мы обозначим через $h$ форму Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$, то*

$$\nabla_{\mathcal{E}} h = -2h, \qquad \nabla_{I\mathcal{E}} h = \nabla_{J\mathcal{E}} h = \nabla_{K\mathcal{E}} h = 0.$$

*Доказательство.* 1. Имеем $(\mathcal{L}_{\mathcal{E}}I)X = [\mathcal{E}, IX] - I[\mathcal{E}, X]$. Это выражение очевидно равно нулю, когда $X \in \mathfrak{g}_0$, так как $\mathcal{E}$ – элемент центра алгебры $\mathfrak{g}_0$. Если $X \in \mathfrak{g}_1$, то $IX = [X, I\mathcal{E}]$ и $[\mathcal{E}, [X, I\mathcal{E}]] = [[\mathcal{E}, X], I\mathcal{E}] = I[\mathcal{E}, X]$, значит и в этом случае $(\mathcal{L}_{\mathcal{E}}I)X = 0$. То же рассуждение применимо к $J$ и $K$.

2. Для $X \in \mathfrak{g}_0$ имеем $\nabla_X\mathcal{E} = -X \cdot \mathcal{E} = X$ (см. Замечание 2.3.1).

   Теперь предположим, что $X \in \mathfrak{g}_1$. Как следует из пункта 1, $\overline{\partial}\mathcal{E} = 0$ и по формулам (2.1.3) и (2.1.4) получаем

$$\nabla_X\mathcal{E} = \frac{1}{2}(-J[X, J\mathcal{E}] + K[IX, J\mathcal{E}]) = \frac{1}{2}(-J^2X + KJIX) = X.$$

3. Немедленно следует из пункта 2.

4. Используя биинвариантность формы Киллинга, получим необходимое тождество:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathcal{E}}h)(X, Y) &= -h(\nabla_{\mathcal{E}}X, Y) - h(X, \nabla_{\mathcal{E}}Y) \\
&= -h(\nabla_X\mathcal{E} + [\mathcal{E}, X], Y) - h(X, \nabla_Y\mathcal{E} + [\mathcal{E}, Y]) \\
&= -2h(X, Y).
\end{aligned}$$

   Последние три равенства получаются так же, с учетом того факта, что форма $h$ является кватернионно-эрмитовой.

□

*Замечание* 2.3.3. Заметим, что если $M$ – компактное многообразие, на котором задана связность без кручения $\nabla$, то существование векторного поля $\mathcal{E}$ с условием $\nabla\mathcal{E} = Id$ накладывает существенные ограничения на связность $\nabla$. А именно, заметим, что для любого векторного поля X имеется тождество $\nabla_{\mathcal{E}}X = X + \mathcal{L}_{\mathcal{E}}X$. Аналогичное тождество есть для любой 1-формы $\alpha$: $\nabla_{\mathcal{E}}\alpha = -\alpha + \mathcal{L}_{\mathcal{E}}\alpha$. Теперь рассмотрим тензорное поле типа $(k, m)$, то есть $T \in \Gamma\left((TM)^{\otimes k} \otimes (T^*M)^{\otimes m}\right)$. Локально $T$ можно представить в виде суммы разложимых тензоров вида $X_1 \otimes \ldots \otimes X_k \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_m$. Мы получаем $\nabla_{\mathcal{E}} T = (k-m)T + \mathcal{L}_{\mathcal{E}} T$. Предположим, что $\nabla$ сохраняет $T$; тогда $\mathcal{L}_{\mathcal{E}} T = (m-k)T$. Если $T$ не равно нулю в какой-то точке, проведем через эту точку интегральную кривую векторного поля $\mathcal{E}$. При $m \neq k$ мы получим, что норма (относительно произвольной метрики) поля $T$, ограниченного на интегральную кривую, должна стремиться к бесконечности, а это невозможно на компактном многообразии $M$. Это значит, что $\nabla$ может сохранять только тензорные поля типа $(k,k)$. В частности, $\nabla$ не может сохранять никакой метрики. Кроме того, векторное поле $\mathcal{E}$, обладающее свойством $\nabla \mathcal{E} = Id$ всегда единственно, если существует. Действительно, если $\nabla \mathcal{E}' = Id$, то $\nabla$ сохраняет $\mathcal{E} - \mathcal{E}'$, следовательно $\mathcal{E} - \mathcal{E}' = 0$.

### 2.3.2. Вычисление голономии

Нам понадобится следующая техническая лемма.

**Лемма 2.3.4.** *Обозначим через $R$ кривизну связности Обаты. Тогда*

1. $R(X,IX)X + JR(X,KX)X - KR(X,JX)X = 0$ *для всех $X$;*

2. *Предположим, что $\mathcal{Z}$ – такое векторное поле, что $R(X,Y)\mathcal{Z} = 0$ для любых векторных полей $X$ и $Y$. Тогда $R(\mathcal{Z},X)X = 0$ для всех $X$.*

*Доказательство.* Мы будем использовать первое тождество Бьянки (которое справедливо для произвольной связности без кручения) и тот факт, что кривизна связности Обаты является $SU(2)$-инвариантной 2-формой с коэффициентами в $\mathbb{H}$-линейных эндоморфизмах (согласно Предложению 2.1.1). Имеем:

$$\begin{aligned} R(X,IY)Z &= R(Z,IY)X + R(X,Z)IY \\ &= R(Z,IY)X + IR(Y,Z)X + IR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

где второе равенство следует из $\mathbb{H}$-линейности $R(X,Z)$ и первого тождества Бьянки. Аналогично:

$$R(X,IY)Z = R(Y,IX)Z = R(Z,IX)Y + IR(Y,Z)X,$$

и мы получаем следующее соотношение для любых векторных полей $X$, $Y$, $Z$:

$$R(Z,IX)Y = R(Z,IY)X + IR(X,Y)Z.$$

Подставляя $Y = JX$, $Z = X$, получаем первое утверждение леммы. Кроме того, мы видим что $R(\mathcal{Z},IX)IX = -R(\mathcal{Z},X)X$ и то же верно для $J$ и $K$. Таким образом, $R(\mathcal{Z},X)X = R(\mathcal{Z},IJKX)IJKX = -R(\mathcal{Z},X)X$, что доказывает второе утверждение. $\square$

Необходимо сделать несколько замечаний о кривизне связности Обаты на $SU(3)$. Напомним, что имеется разложение $\mathfrak{su}(3) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, где $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_1$ – одномерные $\mathbb{H}$-подпространства, порожденные $\mathcal{E}$ и $W$ соответственно. Заметим, что можно выбрать $W$ так, чтобы $\nabla_W W \neq 0$: в противном случае мы получили бы, что $\nabla_W W = 0$ для всех $W \in \mathfrak{g}_1$. Так как связность Обаты $\mathbb{H}$-линейна, из этого следовало бы $\nabla_{IW} W = \nabla_{JW} W = \nabla_{KW} W = 0$. Но $\mathfrak{g}_1$ – одномерное подпространство, поэтому мы бы получили $\nabla_X Y = 0$ и следовательно $[X,Y] = 0$ для всех $X$, $Y$ из $\mathfrak{g}_1$, что неверно.

Напомним, что имеется следующее выражение для кривизны: $R(X,Y)Z = \mathrm{Alt}(\nabla^2 Z)(X,Y)$, где $\nabla^2 Z \in \Lambda^1 G \otimes \Lambda^1 G \otimes TG$ – билинейная форма со значениями в векторных полях, и Alt означает антисимметризацию этой формы. Из третьей части Предложения 2.3.2 мы получаем, что $R(X,Y)\mathcal{E} = \mathrm{Alt}(\nabla^2 \mathcal{E})(X,Y) = 0$, поэтому $\mathfrak{g}_0$ содержится в ядре всех эндоморфизмов $R(X,Y)$.

Мы утверждаем, что $R(X,Y)\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1$. Предположим, что $X, Y \in \mathfrak{g}_0$, тогда из первого тождества Бьянки следует, что $R(X,Y)\mathfrak{g}_1 = 0$. Рассмотрим теперь $X \in \mathfrak{g}_0$ и $Y \in \mathfrak{g}_1$; так как подпространство $\mathfrak{g}_1$ одномерно и кривизна $SU(2)$-инвариантна, из второй части Леммы 2.3.4 следует $R(X,Y)Z = 0$

для всех $Z \in \mathfrak{g}_1$. Заметим, что связность Обаты сохраняет градуировку на $\mathfrak{g}$, следовательно при $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ мы имеем $R(X,Y)\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_1$. Отметим, что образ $R(X,Y)$ должен быть нетривиален для некоторых $X, Y$, иначе связность Обаты была бы плоской, что неверно в нашем случае. Нам понадобится следующее утверждение

**Предложение 2.3.5.** *Группа голономии связности Обаты содержит элемент, действующий тождественно на $\mathfrak{g}_0$ и умножающий $\mathfrak{g}_1$ на ненулевой кватернион, не являющийся вещественным.*

*Доказательство.* По теореме Амброза-Зингера (см. 1.2.2) алгебра Ли группы голономии содержит все эндоморфизмы $R(X,Y)$. Если $X, Y \in \mathfrak{g}_1$, то эндоморфизм $R(X,Y)$ действует тривиально на $\mathfrak{g}_0$ и сохраняет $\mathfrak{g}_1$. Напомним, что $\mathfrak{g}_1$ одномерно над $\mathbb{H}$ и порождено $W$. Обозначим $Z_1 = R(W, IW)W$, $Z_2 = R(W, JW)W$, $Z_3 = R(W, KW)W$. Из первой части Леммы 2.3.4 следует, что подпространство, порожденное $Z_1$, $Z_2$ и $Z_3$ имеет размерность не меньше двух. В противном случае, мы бы получили $Z_i = \alpha_i Z_0$, $i = 1, 2, 3$, для некоторых $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и $Z_0 \in \mathfrak{g}_1$. Тогда по Лемме 2.3.4, $(\alpha_1 + \alpha_3 J - \alpha_2 K)Z_0 = 0$, следовательно $Z_i = 0$, значит связность плоская, что неверно. Подалгебра, порожденная эндоморфизмами $R(X,Y)$, где $X, Y \in \mathfrak{g}_1$, как минимум двумерная, что доказывает утверждение. □

Доказательство основной теоремы будет основано на следующем утверждении.

**Предложение 2.3.6.** *Голономия связности Обаты на $SU(3)$ неприводима.*

*Доказательство.* Доказательство будет состоять из двух частей. Сначала мы докажем, что в касательном расслоении $TG$ нет левоинвариантных подрасслоений, сохраняемых группой голономии. Далее мы покажем, что там нет никаких подрасслоений, сохраняемых голономией.

Предположим, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – подпространство, соответствующее левоинвариантному подрасслоению, сохраняемому группой голономии. Из левоинвариантности следует, что $\nabla_X Y \in \mathfrak{h}$ для всех $X \in \mathfrak{g}$ и $Y \in \mathfrak{h}$. Если $V \in \mathfrak{h}$ и $V = V_0 + V_1$, где $V_0 \in \mathfrak{g}_0$, $V_1 \in \mathfrak{g}_1$, тогда

$$\nabla_{\mathcal{E}} V = \nabla_V \mathcal{E} + [\mathcal{E}, V] = V + [\mathcal{E}, V_1],$$

поскольку $\mathcal{E}$ лежит в центре $\mathfrak{g}_0$. Мы заключаем, что $[\mathcal{E}, V_1] \in \mathfrak{h}$. Заметим, что при отождествлении (2.2.1) алгебры $\mathfrak{g}$ с алгеброй косоэрмитовых матриц, $\mathcal{E} \in \mathfrak{g}$ переходит в диагональную матрицу с $D = -(b/2)Id$. Легко проверить, что $(\mathrm{ad}_{\mathcal{E}})^2$ действует на $\mathfrak{g}_1$ умножением на вещественное число, поэтому $V_1 \in \mathfrak{h}$ и следовательно $V_0 \in \mathfrak{h}$. Если существует $V \in \mathfrak{h}$, такое что $V_0 \neq 0$, то Эйлерово векторное поле $\mathcal{E}$ содержится в $\mathfrak{h}$, и из этого следует равенство $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. В противном случае, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$. Но это возможно только в случае, когда $\mathfrak{h} = 0$: как было замечено выше, $\mathfrak{g}_1$ порождается над $\mathbb{H}$ векторным полем $W$, причем $\nabla_W W \neq 0$, поэтому из $\mathbb{H}$-линейности связности $\nabla$ следует, что $\nabla_W V \neq 0$ и принадлежит $\mathfrak{g}_0$ для ненулевого $V \in \mathfrak{g}_1$.

Перейдем ко второй части доказательства. Обозначим через $L_g \colon G \to G$ левый сдвиг $h \mapsto gh$. Предположим, что существует некоторое (не обязательно левоинвариантное) собственное подрасслоение $B$, сохраняемое группой голономии. Тогда для любого $g \in G$ подрасслоение $L_g^* B$ тоже сохраняется группой голономии. Таким образом, существует семейство инвариантных относительно голономии подрасслоений. Мы утверждаем, что можно найти такое подрасслоение $B$ в этом семействе, для которого выполнено следующее:

1. $\dim_{\mathbb{R}} B = 4$,

2. $B$ инвариантно относительно некоторой комплексной структуры,

3. $\dim_{\mathbb{R}}(B \cap L_g^* B)$ равно либо 0, либо 4 для всех $g \in G$.

Сначала построим подрасслоение, удовлетворяющее первым двум условиям. Рассмотрим инвариантное относительно голономии подрасслоение $B$ минимальной возможной размерности. Тогда $\dim_{\mathbb{R}} B$ должно быть меньше или равно четырех, иначе мы можем заменить $B$ на $B \cap L_g^* B$, являющееся собственным подрасслоением в $B$ для некоторого $g \in G$. Рассмотрим четыре случая. Если $\dim_{\mathbb{R}} B = 1$, мы можем рассмотреть $\mathbb{H}$-линейную оболочку $B$ и получим $\mathbb{H}$-инвариантное подрасслоение вещественной размерности 4. Если $\dim_{\mathbb{R}} B = 2$, то возьмем $B + IB$. Если $\dim_{\mathbb{R}} B = 3$, мы можем рассмотреть $B+IB$, и получим подрасслоение комплексной размерности 2 или 3. В первом случае мы получаем то, что необходимо, а иначе мы можем взять пересечение расслоения с его левым сдвигом и получить расслоение меньшего ранга. Рассмотрим случай, когда $\dim_{\mathbb{R}} B = 4$. Тогда $B$ либо $I$-инвариантно, либо $B \cap IB = 0$. В последнем случае $B \oplus IB$ будет комплексным представлением группы голономии. Предположим, что оно неприводимо. Рассмотрим оператор $\mathcal{C}$, который действует тождественно на $B$ и умножает $IB$ на $-1$. Этот оператор $I$-антилинеен и сохраняется голономией, как и комплексная структура $J$. Композиция $J\mathcal{C}$ является $I$-линейной и значит, по лемме Шура, должна быть равна $\lambda Id$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Но при этом $\mathcal{C}^2 = Id$, и мы получаем $\lambda\mathcal{C} = J$ и $-Id = J^2 = \lambda\mathcal{C}\lambda\mathcal{C} = |\lambda|^2 Id$, что невозможно. Следовательно представление $B \oplus IB$ приводимо. Мы можем заменить $B$ на собственное $I$-инвариантное подрасслоение в $TG$, сохраняемое голономией и минимального ранга. Ранг расслоения $B$ (над $\mathbb{R}$) должен быть меньше или равен четырех, иначе мы могли бы заменить $B$ на $B \cap L_g^* B$ для некоторого $g \in G$. Мы рассматриваем случай, когда минимальная размерность такого подрасслоения больше или равна четырем, поэтому $\dim_{\mathbb{R}} B = 4$ и мы получаем подрасслоение, удовлетворяющее первым двум условиям.

Если полученное подрасслоение $B$ не обладает третьим свойством, то существует элемент $g \in G$, такой что $\dim_{\mathbb{R}}(B \cap L_g^* B) = 2$. Тогда мы можем заменить $B$ на $\mathbb{H}$-линейную оболочку $B \cap L_g^* B$. Так как $B \cap L_g^* B$ является $I$-инвариантным, его $\mathbb{H}$-линейная оболочка имеет вещественную размерность четыре и обладает всеми тремя нужными свойствами.

Итак, мы построили подрасслоение $B$, обладающее тремя свойствами, перечисленными выше. Так как оно не может быть левоинвариантным, то существуют такие $g_1, g_2 \in G$, что $B$, $L^*_{g_1}B$ и $L^*_{g_2}B$ образуют тройку подрасслоений, попарные пересечения которых тривиальны. Мы будем пользоваться следующим утверждением.

**Лемма 2.3.7.** *Пусть $V$ – $2n$-мерное векторное пространство, и $V_1$, $V_2$, $V_3$ – три $n$-мерных подрасслоения, имеющих тривиальных попарные пересечения. Обозначим $P_{ij}$ оператор проекции на $V_i$ вдоль $V_j$. Тогда подалгебра, порожденная $P_{ij}$ изоморфна $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, то есть алгебре матриц $2 \times 2$.*

*Доказательство.* Рассмотрим оператор $A = P_{12}P_{31}$. Он отображает $V_2$ изоморфно на $V_1$; если мы рассмотрим разложение $V = V_1 \oplus V_2$ и отождествим $V_1$ с $V_2$ с помощью $A$, то операторы $P_{12}$, $P_{21}$, $P_{12}P_{31}$ и $P_{21}P_{32}$ будут задаваться матрицами $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. $\square$

Группа голономии сохраняет тройку попарно дополнительных подрасслоений. Эти подрасслоения инвариантны относительно одной из комплексных структур. Мы зафиксируем эту комплексную структуру и будем рассматривать $TG$ как комплексное векторное расслоение. Действие голономии коммутирует с действием алгебры, порожденной проекторами. Поэтому мы можем выбрать изоморфизм векторных пространств $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$, причем группа голономии нетривиально действует на второй сомножитель. В частности, каждый оператор в группе голономии имеет не более двух различных собственных значений. Но из Предложения 2.3.5 следует, что группа голономии содержит оператор с тремя различными собственными значениями (одно из которых равно единице и два других комплексно-сопряженные). Это противоречие показывает, что инвариантного относительно голономии подрасслоения существовать не может. $\square$

Мы готовы доказать основную теорему.

**Теорема 2.3.8.** *Группа голономии связности Обаты на $SU(3)$ с левоинвариантной гиперкомплексной структурой совпадает с $GL(2, \mathbb{H})$.*

*Доказательство.* Согласно Предложению 2.3.6 действие голономии неприводимо. Утверждение теоремы следует из классификации неприводимых групп голономии, полученной в [34]. Действительно, связность Обаты на $SU(3)$ не сохраняет никакой метрики (см. Замечание 2.3.3). Внизу приводится список неметрических групп голономии с представлением голономии $\mathbb{R}^8$ ($T_{\mathbb{F}}$ означает любую связную подгруппу Ли в $\mathbb{F}^*$):

| Из Таблицы 2 в [34] | Из Таблицы 3 в [34] |
|---|---|
| $T_{\mathbb{R}} \cdot SL(8, \mathbb{R})$ | $SL(2, \mathbb{C})$ действующая в $S^3\mathbb{C}^2$ |
| $T_{\mathbb{C}} \cdot SL(4, \mathbb{C})$ | $\mathbb{C}^* \cdot SL(2, \mathbb{C})$ действующая в $S^3\mathbb{C}^2$ |
| $T_{\mathbb{R}} \cdot SL(2, \mathbb{H})$ | $\mathbb{C}^* \cdot Sp(2, \mathbb{C})$ |
| $Sp(4, \mathbb{R})$ | $SL(2, \mathbb{R}) \cdot SO(p, q)$, $p + q = 4$ |
| $Sp(2, \mathbb{C})$ | $Sp(1) \cdot SO(2, \mathbb{H})$ |
| $\mathbb{R}^* \cdot SO(p, q)$, $p + q = 8$ | |
| $T_{\mathbb{C}} \cdot SO(4, \mathbb{C})$ | |
| $T_{\mathbb{R}} \cdot SL(m, \mathbb{R}) \cdot SL(n, \mathbb{R})$, $mn = 8$ | |
| $T_{\mathbb{R}} \cdot SL(m, \mathbb{H}) \cdot SL(n, \mathbb{H})$, $mn = 2$ | |

Большинство групп в списке очевидно не содержится в $GL(2, \mathbb{H})$ либо по соображениям размерности, либо потому, что они не сохраняют никакой комплексной структуры. Заметим, что действие $SL(2, \mathbb{C})$ на $S^3\mathbb{C}^2$ не сохраняет кватернионной структуры, потому что оно не коммутирует ни с каким $\mathbb{R}$-линейным оператором, не пропорциональным тождественному. Действительно, пусть $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^8)$ – вещественных эндоморфизм, коммутирующий с действием $SL(2, \mathbb{C})$ на $S^3\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^8$. Рассмотрим весовое разложение $S^3\mathbb{C}^2 = \bigoplus_\lambda V_\lambda$, где $V_\lambda$ – собственное подпространство оператора $H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ с собственным значением $\lambda$, и суммирование происходит по $\lambda = 3,\ 1,\ -1,\ -3$. Поскольку собственные значения вещественны, $A$

должен сохранять собственные подпространства $V_\lambda$. Кроме того, $A$ должен быть $\mathbb{C}$-линейным, так как он коммутирует с $\sqrt{-1}H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, который имеет те же собственные подпространства $V_\lambda$ с собственными значениями $\sqrt{-1}\lambda$. По лемме Шура $A$ должен быть скалярным оператором. Таким образом, группы $SL(2, \mathbb{C})$ и $\mathbb{C}^* \cdot SL(2, \mathbb{C})$ не могут быть группами голономии в нашем случае.

Список содержит только одну собственную подгруппу в $GL(2, \mathbb{H})$, а именно $SL(2, \mathbb{H})$. Но если голономия совпадала бы с $SL(2, \mathbb{H})$, связность Обаты сохраняла бы голоморфную форму объема, а это невозможно (см. Замечание 2.3.3). Мы заключаем, что группа голономии совпадает с $GL(2, \mathbb{H})$. $\square$

# Глава 3

# Подмногообразия гиперкомплексных многообразий с голономией $SL(n, \mathbb{H})$

В этой главе мы изучаем некоторые свойства твисторных семейств для гиперкомплексных $SL(n, \mathbb{H})$-многообразий с НКТ-метрикой. Базой такого семейства является комплексная прямая $\mathbb{C}P^1$. Мы докажем, что существуют ограничения на возможные комплексные подмногообразия в многообразии, являющимся общим элементом этого семейства (теоремы 3.3.3 и 3.3.5). Под общим элементом семейства мы будем понимать элемент, лежащий в дополнении к некоторому счетному множеству. В частности, будет показано, что общее многообразие в твисторном семействе не содержит дивизоров, и следовательно не является алгебраическим. Это можно рассматривать как частичное обобщение аналогичных результатов для гиперкэлеровых многообразий (см. [58]) и для плоских гиперкомплексных многообразий (см. [50]). Предварительные сведения об $SL(n, \mathbb{H})$-многообразиях и НКТ-метриках можно найти в главе 1. Результаты этой главы опубликованы в работе [48].

В разделе 3.1 мы напомним конструкцию пространства твисторов гиперкомплексного многообразия и дадим определение трианалитических подмногообразий. В разделе 3.2 мы приведем конструкцию семейства калибраций на $SL(n, \mathbb{H})$-многообразиях. В разделе 3.3 мы докажем основные теоремы.

## 3.1. Пространство твисторов гиперкомплексного многообразия

Рассмотрим гиперкомплексное многообразие $(M, I, J, K)$ (определение см. в разделе 1.1). Напомним (см. раздел 1.2), что любое гиперкомплексное многообразие допускает единственную связность без кручения, сохраняющую комплексные структуры $I$, $J$ и $K$. Она называется связностью Обаты. Любая почти-комплексная структура, сохраняемая связностью без кручения является интегрируемой. Поэтому для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$, таких что $a^2+b^2+c^2=1$, почти-комплексная структура $L = aI + bJ + cK$ интегрируема. По теореме Ньюлендера-Ниренберга, $L$ задает комплексную структуру на $M$. Будем обозначать через $(M, L)$ соответствующее комплексное многообразие.

**Определение 3.1.1.** *Комплексная структура $L = aI+bJ+cK$ называется индуцированной кватернионами.*

Над проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ существует универсальное семейство для индуцированных комплексных структур. А именно, рассмотрим многообразие $X = M \times \mathbb{C}P^1$. Касательное расслоение к $X$ является прямой суммой $TX = TM \oplus T\mathbb{C}P^1$ и мы можем определить на $X$ естественную почти-комплексную структуру $\mathcal{I} \in \mathrm{End}(TX)$. Рассмотрим точку $(x, L) \in X$ (мы рассматриваем вторую координату как индуцированную комплексную структуру на $M$). Тогда $\mathcal{I}$ действует на $T_{(x,L)}X$ диагонально, причем действие на $T_xM$ задается оператором $L_x$, а на $T_L\mathbb{C}P^1$ — стандартной комплексной структурой проективной прямой. Многообразие $(X, \mathcal{I})$ называется пространством твисторов для гиперкомплексного многообразия $M$.

Важнейшим результатом о пространстве твисторов является следующее утверждение, доказательство которого можно найти в [43] в более общей форме, либо в [30], где приведено более прямое доказательство.

**Теорема 3.1.2.** *Если $(M, I, J, K)$ — гиперкомплексное многообразие, то почти-комплексная структура $\mathcal{I}$ на пространстве твисторов интегрируема.*

Таким образом, пространство твисторов гиперкомплексного многообразия само является комплексным многообразием. Соответствующее семейство комплексных структур называют твисторным семейством. Изучение твисторных семейств играет важнейшую роль при исследовании гиперкомплексных (особенно гиперкэлеровых) многообразий, см., например, часть 3 в [23].

Мы будем изучать свойства общих многообразий в твисторном семействе.

**Определение 3.1.3.** *Мы будем называть индуцированную комплексную структуру $L$ общей, если $L \in \mathbb{C}P^1 \backslash S$, где $S$ — некоторое счетное подмножество.*

Нас будет интересовать структура подмногообразий в общем многообразии из твисторного семейства. Дадим следующее определение.

**Определение 3.1.4.** *Пусть $M$ — гиперкомплексное многообразие. Подмножество $Z \subset M$ называется трианалитическим, если оно является комплексно-аналитическим подпространством в $(M, L)$ для любой индуцированной комплексной структуры $L$.*

Геометрия трианалитических подмногообразий изучалась в работе [55]. Было показано, что особенности любого трианалитического подмногообразия можно разрешить, взяв его нормализацию, и что при этом получается гладкое гиперкомплексное многообразие.

Следующая теорема была доказана в [58] (см. также [54]).

**Теорема 3.1.5.** *Пусть $M$ — гиперкэлерово многообразие (не обязательно компактное). Тогда для общей комплексной структуры $L \in \mathbb{C}P^1$ все компактные комплексные подмногообразия $Z \subset (M, L)$ являются трианалитическими.*

Так как трианалитические подмногообразия являются гиперкомплексными в гладких точках, их комплексная размерность четна. Поэтому в $(M, L)$ нет компактных нечетномерных подмногообразий. Из этого следует, что $(M, L)$ не является алгебраическим многообразием.

Необходимо отметить, что приведенное выше утверждение неверно для произвольного гиперкомплексного многообразия. Например, рассмотрим поверхность Хопфа $H = (\mathbb{H}\backslash\{0\})/(x \sim 2x)$. Для каждой индуцированной комплексной структуры $L = aI + bJ + cK$, многообразие $(H, L)$ расслоено над $\mathbb{C}P^1$, и слои являются эллиптическими кривыми $(\mathbb{C}\backslash\{0\})/(x \sim 2x)$. Так что $(H, L)$ содержит дивизоры для любой индуцированной комплексной структуры $L$.

Похожее утверждение было доказано для другого класса многообразий в работе [50] другими методами:

**Теорема 3.1.6.** *Пусть $M$ — компактное многообразие с плоской гиперкомплексной структурой. Тогда для общей комплексной структуры $L \in \mathbb{C}P^1$ многообразие $(M, L)$ не является алгебраическим.*

Мы докажем ослабленную версию теоремы 3.1.5 для $SL(n, \mathbb{H})$-многообразий допускающих HKT-метрику (теорема 3.3.3). Кроме того, без условия существования HKT-метрики мы можем доказать отсутствие голоморфных лагранжевых подмногообразий в многообразии с общей индуцированной комплексной структурой (теорема 3.3.5).

В работе [22] результаты из [54] и [58] интерпретировались в терминах калибраций на гиперкэлеровых многообразиях (определение калибрации см. в разделе 1.4). Оказалось, что некоторые калибрации из гиперкэлеровой геометрии переносятся в контекст более общих гиперкомплексных многообразий (см. 3.2.4). Именно это позволяет доказать ослабленную версию теоремы 3.1.5.

## 3.2. Семейство калибраций на $SL(n, \mathbb{H})$-многообразиях

Ниже дается определение кватернионного комплекса Дольбо. Наше изложение следует работе [64], хотя этот комплекс появился еще в работах Саламона (см., например [14]).

Пусть $(M, I, J, K)$ — гиперкомплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{R}} M = 4n$. Гиперкомплексная структура задает естественное действие группы $SU(2) \subset \mathbb{H}^*$

на внешней алгебре $\Lambda^*(M)$.

Как известно, каждое неприводимое комплексное представление группы $SU(2)$ является симметрической степенью $S^i(W_1)$, где $W_1$ — это стандартное двумерное представление. Будем говорить, что представление $U$ имеет вес $i$, если оно изоморфно $S^i(W_1)$. Из формулы Клебша-Гордана следует, что вес мультипликативен в следующем смысле: если $i \leq j$, то

$$W_i \otimes W_j = \bigoplus_{k=0}^{i} W_{i+j-2k},$$

где $W_i = S^i(W_1)$ обозначает неприводимое представление веса $i$.

Обозначим через $V^i \subset \Lambda^i(M)$ сумму всех неприводимых подпредставлений $W \subset \Lambda^i(M)$ веса $< i$. Так как вес мультипликативен, то $V^* = \bigoplus_i V^i$ является идеалом в $\Lambda^*(M)$.

Легко видеть, что дифференциал де Рама $d$ увеличивает вес не более чем на единицу: $dV^i \subset V^{i+1}$. Поэтому $V^* \subset \Lambda^*(M)$ является дифференциальным идеалом в DG-алгебре де Рама $(\Lambda^*(M), d)$.

**Определение 3.2.1.** *Обозначим через $(\Lambda^*_+(M), d_+)$ фактор-алгебру $\Lambda^*(M)/V^*$. Она называется кватернионной алгеброй Дольбо, или кватернионным комплексом Дольбо многообразия $M$ (qD-алгеброй или qD-комплексом для краткости).*

Ходжева биградуировка совместима с весовым разложением $\Lambda^*(M)$ и определяет разложение Ходжа для $\Lambda^*_+(M)$ (см. [56]):

$$\Lambda^i_+(M) = \bigoplus_{p+q=i} \Lambda^{p,q}_{+,I}(M).$$

Подрасслоения $\Lambda^{p,q}_{+,I}(M)$ являются весовыми для некоторого выбора картановской подалгебры в $\mathfrak{su}(2)$. Действие $\mathfrak{su}(2)$ индуцирует изоморфизм весовых подпространств внутри неприводимого представления. Из этого следует следующее утверждение ([56]):

**Предложение 3.2.2.** *Рассмотрим гиперкомплексное многообразие $(M, I, J, K)$ с ходжевым разложением qD-комплекса, как определено выше:*

$$\Lambda^i_+(M) = \bigoplus_{p+q=i} \Lambda^{p,q}_{+,I}(M).$$

*Тогда существует естественный изоморфизм*

$$\mathcal{R}_{p,q} \colon \Lambda^{p+q,0}_I(M) \to \Lambda^{p,q}_{I,+}(M). \tag{3.2.1}$$

Рассмотрим оператор проекции $\Pi^{p,q}_+ \colon \Lambda^{p,q}_I(M) \to \Lambda^{p,q}_{I,+}(M)$ и пусть

$$R \colon \Lambda^{p,q}_I(M) \to \Lambda^{p+q,0}_I(M)$$

обозначает композицию $\mathcal{R}^{-1}_{p,q} \circ \Pi^{p,q}_+$.

Далее, пусть $(M, I, J, K)$ является $SL(n, \mathbb{H})$-многообразием, $\dim_{\mathbb{R}} M = 4n$. Выберем нигде не зануляющееся голоморфное сечение $\Phi_I$ расслоения $\Lambda^{2n,0}_I(M)$. Предположим, что $\Phi_I$ вещественно, то есть $J(\Phi_I) = \bar{\Phi}_I$. Существование такого сечения эквивалентно тому, что $\mathrm{Hol}(\nabla) \subset SL(n, \mathbb{H})$, где $\nabla$ обозначает связность Обаты (см. [62]). Часто бывает удобно определить $SL(n, \mathbb{H})$-структуру зафиксировав кватернионное действие и голоморфную форму $\Phi_I$.

Определим отображение

$$\mathcal{V}_{p,q} \colon \Lambda^{p+q,0}_I(M) \to \Lambda^{n+p,n+q}_I(M)$$

следующим соотношением:

$$\mathcal{V}_{p,q}(\eta) \wedge \alpha = \eta \wedge R(\alpha) \wedge \bar{\Phi}_I, \tag{3.2.2}$$

для любой формы $\alpha \in \Lambda^{n-p,n-q}_I(M)$.

Следующее предложение устанавливает некоторые важные свойства отображения $\mathcal{V}_{p,q}$ (доказательство приводится в [64], предложение 4.2, или [1], теорема 3.6):

**Предложение 3.2.3.** *Для $SL(n, \mathbb{H})$-многообразия $(M, I, J, K)$ и отображения*

$$\mathcal{V}_{p,q} \colon \Lambda_I^{p+q,0}(M) \to \Lambda_I^{n+p,n+q}(M)$$

*определенного выше верно следующее:*

**(i)** $\mathcal{V}_{p,q}(\eta) = \mathcal{R}_{p,q}(\eta) \wedge \mathcal{V}_{0,0}(1)$.

**(ii)** *Отображение $\mathcal{V}_{p,q}$ инъективно для всех $p$, $q$.*

**(iii)** $(\sqrt{-1})^{(n-p)^2}\mathcal{V}_{p,p}(\eta)$ *вещественна тогда и только тогда, когда $\eta \in \Lambda_I^{2p,0}(M)$ вещественна, и слабо положительна тогда и только тогда, когда $\eta$ слабо положительна.*

**(iv)** $\mathcal{V}_{p,q}(\partial\eta) = \partial\mathcal{V}_{p-1,q}(\eta)$, *и* $\mathcal{V}_{p,q}(\partial_J\eta) = \bar{\partial}\mathcal{V}_{p,q-1}(\eta)$.

**(v)** $\mathcal{V}_{0,0}(1) = \lambda\mathcal{R}_{n,n}(\Phi_I)$, *где $\lambda$ положительное рациональное число, зависящее только от размерности $n$.*

Далее мы напомним конструкцию семейства калибраций на $SL(n, \mathbb{H})$-многообразиях, следуя [22]. Эти калибрации будут играть центральную роль в доказательстве основной теоремы этой главы.

Пусть $(M, I, J, K)$ является $SL(n, \mathbb{H})$-многообразием с вещественной голоморфной формой объема $\Phi_I$, сохраняемой связностью Обаты, как и выше. Следующая теорема была доказана в [22] (теорема 5.4):

**Теорема 3.2.4.** *Пусть $(M, I, J, K)$ является $SL(n, \mathbb{H})$-многообразием, $(\Phi_I)_J^{n,n}$ — это $(n, n)$-компонента формы $\Phi_I$ по отношению к комплексной структуре $J$, а $g$ — HKT метрика. Тогда на $M$ существует такая функция $c_i$, что $V_{n+i,n+i}^J := (\Phi_I)_J^{n,n} \wedge \omega_J^i$ является калибрацией по отношению к метрике $\widetilde{g} = c_i g$, конформной $g$. При этом калиброванные подмногообразия — это комплексные подмногообразия в $(M, J)$, которые коизотропны по отношению к $(2, 0)$-форме $\widetilde{\omega}_K + \sqrt{-1}\widetilde{\omega}_I$.*

Заметим, что $V^J_{n+i,n+i} \in \Lambda^{n+i,n+i}_J M$, но с помощью той же конструкции мы можем построить калибрации $V^L_{n+i,n+i} \in \Lambda^{n+i,n+i}_L M$ для любой индуцированной комплексной структуры $L$.

Нам понадобится следующая характеризация форм $V^I_{n+i,n+i}$ (доказательство см. в [22], замечание 3.8 и предложение 3.9):

**Предложение 3.2.5.** *Пусть $V^I_{n+i,n+i} \in \Lambda^{n+i,n+i}(M, I)$ — калибрация из теоремы 3.2.4. Тогда форма $V^I_{n+i,n+i}$ пропорциональна формам $\mathcal{V}_{i,i}(\Omega^i_I)$ и $\Pi^{n+i,n+i}_+(\omega^{n+i}_I)$ с некоторыми положительными коэффициентами, не зависящими от комплексной структуры $I$ (здесь $\Omega_I$ обозначает HKT-форму). В частности, форма $V^I_{n+i,n+i}$ имеет максимальный вес и для любого $\alpha \in \Lambda^{n-i,n-i}$ имеем:*

$$V^I_{n+i,n+i} \wedge \alpha = a_i \Omega^i_I \wedge R(\alpha) \wedge \bar{\Phi}_I, \tag{3.2.3}$$

*где $a_i$ — некоторые положительные функции на $M$.*

*Замечание* 3.2.6. Заметим, что калибрации $V^I_{n+i,n+i}$ построены в том случае, когда имеется HKT-метрика. Однако это условие не нужно при $i = 0$. Так как согласно предложению 3.2.3 форма $\mathcal{V}_{0,0}(1)$ всегда замкнута, предложение 3.2.5 верно для $i = 0$ даже если метрика не является HKT-метрикой. Данное замечание существенно для доказательства 3.3.5 без предположения о существовании HKT-метрики.

*Замечание* 3.2.7. Вообще говоря, форма $V^J_{n+i,n+i}$ не обязана быть параллельной относительно связности Обаты. Если эта форма параллельна, то поскольку $\Phi_I$ параллельна, то и $\omega_J$ параллельна. Тогда многообразие $(M, I, J, K, g)$ является гиперкэлеровым. В общем случае $V^J_{n+i,n+i}$ не является параллельной ни для какой связности без кручения на $M$ (см. [21], утверждение 6.6).

## 3.3. Подмногообразия в $SL(n,\mathbb{H})$-многообразиях

В этом разделе мы докажем основное вспомогательное утверждение 3.3.2 и выведем из него основную теорему этой главы 3.3.3.

Рассмотрим $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие $(M,I,J,K)$ с НКТ-метрикой $g$. Выше было объяснено, как строится последовательность замкнутых положительных дифференциальных форм $V^I_{n+i,n+i} \in \Lambda^{n+i,n+i}_I M$, $i = 0,1,...,n$. Мы будем использовать эти формы для доказательства теоремы 3.3.3.

Доказательство теоремы 3.3.3 основывается на следующем, по существу линейно-алгебраическом, наблюдении. Рассмотрим кватернионное векторное пространство $(U,I,J,K)$ вещественной размерности $4n$ с формой объема $\Phi_I \in \Lambda^{2n,0}_I U$ и пусть $V^I_{n+i,n+i}$ — элемент $\Lambda^{n+i,n+i}_I(U^*)$, построенный так же как в 3.2.4. Рассмотрим $I$-инвариантное подпространство $W \subset U$ комплексной размерности $n+i$. Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}}(W \cap J(W)) \geq 2i$. Обозначим через $\xi_W \in \Lambda^{n+i,n+i}_I U$ поливектор, соответствующий $W$ (он корректно определен с точностью до скалярного множителя). Рассмотрим функцию $\psi\colon SU(2) \to \mathbb{R}$, которая отображает $g \in SU(2)$ в $\langle V^I_{n+i,n+i}, g(\xi_W)\rangle$. Подпространство $W$ инвариантно относительно $I$, поэтому функция $\psi$ постоянна на подгруппе $U(1)$, которая соответствует комплексной структуре $I$. Поэтому мы можем рассматривать $\psi$ как функцию на $SU(2)/U(1) = \mathbb{C}P^1$.

**Предложение 3.3.1.** *В ситуации рассмотренной выше, и при условии* $\dim_{\mathbb{C}}(W \cap J(W)) = 2k$ *верно следующее:*

**(i)** *Если $k = i$, то $\psi$, рассмотренная как функция на $\mathbb{C}P^1$, имеет строгий экстремум в точке, которая соответствует комплексной структуре $I$.*

**(ii)** *Если $k > i$, то $\psi$ тождественно равна нулю.*

*Доказательство.* Зафиксируем такую кватернионно-эрмитову метрику на $U$, что $\Phi_I \wedge \bar{\Phi}_I$ является формой объема. Обозначим через $\eta_W \in \Lambda^{n-i,n-i}(U^*)$

форму двойственную $\xi_W$, то есть $\eta_W = *(\xi_W^\sharp)$, где $\sharp$ обозначает двойственность по отношению к метрике, а $*$ — звездочка Ходжа.

Тогда мы получаем $\psi(g) = \langle V^I_{n+i,n+i}, g(\xi_W)\rangle = *(V^I_{n+i,n+i} \wedge g(\eta_W))$. Из (3.2.3) следует, что

$$V^I_{n+i,n+i} \wedge g(\eta_W) = a_i \Omega_I^i \wedge R(g(\eta_W)) \wedge \bar{\Phi}_I.$$

Мы можем выбрать ортонормированный базис в $U^{1,0}$ следующего вида:

$$\langle e_1, J\bar{e}_1, \ldots, e_n, J\bar{e}_n\rangle,$$

причем

$$W^{1,0} = \langle e_1, J\bar{e}_1, \ldots, e_k, J\bar{e}_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{n+i-k}\rangle,$$

Если $k > i$, то для любого $g \in SU(2)$ форма $R(g(\eta_W))$ должна принадлежать $(2n-2i)$-ой внешней степени подпространства в $(U^*)^{1,0}$, порожденного векторами $e^*_{k+1}, J\bar{e}^*_{k+1}, \ldots, e^*_n, J\bar{e}^*_n$. Но эта внешняя степень нулевая, поэтому $R(g(\eta_W)) = 0$, что доказывает вторую часть предложения.

Если $k = i$, то

$$\eta_W = J\bar{e}^*_{i+1} \wedge \ldots \wedge J\bar{e}^*_n \wedge Je^*_{i+1} \wedge \ldots \wedge Je^*_n$$

и

$$R(\eta_W) = e^*_{i+1} \wedge J\bar{e}^*_{i+1} \wedge \ldots \wedge e^*_n \wedge J\bar{e}^*_n.$$

Так как $\Omega_I = \sum e^*_j \wedge J\bar{e}^*_j$, мы видим, что в этом случае $\Omega_I^i \wedge R(\eta_W)$ не равно нулю, то есть $\psi(1) \neq 0$. Мы утверждаем, что функция $\psi$ не постоянна в этом случае. Иначе она была бы равна своему усреднению по действию группы $SU(2)$, а это усреднение равно $\langle \mathrm{A}v_{SU(2)} V^I_{n+i,n+i}, \xi_W\rangle$. Но в данном выражении $\mathrm{A}v_{SU(2)} V^I_{n+i,n+i} = 0$, потому что $V^I_{n+i,n+i}$ имеет максимальный вес и лежит в нетривиальном неприводимом представлении группы $SU(2)$. Таким образом, усреднение $\psi$ равно нулю.

Далее, рассмотрим действие группы $U(1)$ вращениями двумерной сферы вокруг оси, проходящей через две точки, которые соответствуют комплексным структурам $I$ и $-I$. Мы утверждаем, что функция $\psi$ инвариантна относительно этого действия. Это следует из определения $\psi$: заметим, что $V^I_{n+i,n+i}$ и $\xi_W$ являются $I$-инвариантными. Таким образом, $g \mapsto \langle V^I_{n+i,n+i}, g(\xi_W)\rangle$ инвариантна (как функция на $SU(2)$) относительно действия сопряжениями подгруппы $U(1)$, соответствующей комплексной структуре $I$.

Так как $\psi$ является аналитической функцией на сфере, которая не равна константе, и она инвариантна относительно действия группы $U(1)$, рассмотренного выше, то она должна иметь строгий экстремум в точке, соответствующей $I$. Это завершает доказательство предложения. □

Рассмотрим $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие $(M, I, J, K)$, снабженное HKT-метрикой, и пусть $[Z] \in H_{2n+2i}(M,\mathbb{Z})$ — целочисленный класс гомологий. Рассмотрим функцию $\phi_Z\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{R}$, которая ставит в соответствие каждому $L \in \mathbb{C}P^1$ число $\int_Z V^L_{n+i,n+i}$, где $V^L_{n+i,n+i} \in \Lambda^{n+i,n+i}(M,L)$ обозначает соответствующую калибрацию.

Заметим, что если $L = aI + bJ + cK$, где $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то $\omega_L = a\omega_I + b\omega_J + c\omega_K$. Так как $V^L_{n+i,n+i}$ пропорциональна $\Pi^{n+i,n+i}_+(\omega_L^{n+i})$ с коэффициентом, который не зависит от $L$ (см. 3.2.5), мы видим, что функция $\phi_Z$ является ограничением на сферу $S^2$ однородного полинома в $\mathbb{R}^3$. У такой функции может быть только конечное число экстремумов (это следует, например, из утверждения о том, что вещественное алгебраическое многообразие имеет конечное число компонент связности, см. [65]). Обозначим через $S \subset \mathbb{C}P^1$ множество всех строгих экстремумов функций $\phi_Z$ для всех целочисленных классов гомологий. Так как для каждого фиксированного $[Z] \in H_{2n+2i}(M,\mathbb{Z})$ число экстремумов $\phi_Z$ конечно, то множество $S$ счетно.

**Теорема 3.3.2.** *Для каждой комплексной структуры $L \in \mathbb{C}P^1 \backslash S$ и для любого компактного комплексного подмногообразия $Z \subset (M, L)$ комплексной* *размерности $n+i$ справедливо неравенство* $\dim_{\mathbb{C}}(TZ \cap J(TZ)) > 2i$.

*Доказательство.* Зафиксируем форму объема $dv$ на $Z$ и предположим, что $\dim_{\mathbb{C}}(TZ \cap J(TZ)) = 2i$. Тогда

$$\phi_Z(L_1) = \int\limits_Z \langle V^{L_1}_{n+i,n+i}, \xi_{TZ}\rangle dv.$$

Выберем произвольную гладкую точку $x \in Z$. Заметим, что для любого $g \in SU(2)$ выполнено $\langle V^{L}_{n+i,n+i}, g(\xi_{T_xZ})\rangle = \langle V^{\mathrm{Ad}_g L}_{n+i,n+i}, \xi_{T_xZ}\rangle$. Таким образом, из 3.3.1 следует что функция $L_1 \mapsto \langle V^{L_1}_{n+i,n+i}, \xi_{T_xZ}\rangle$ имеет строгий экстремум в точке $L_1 = L$. Поэтому $\phi_Z$ тоже имеет строгий экстремум в этой точке, что противоречит нашему предположению $L \in \mathbb{C}P^1 \backslash S$. □

Теперь мы готовы доказать основную теорему этой главы.

**Теорема 3.3.3.** *Пусть $(M, I, J, K)$ является $SL(n, \mathbb{H})$-многообразием, допускающим HKT-метрику. Тогда существует такое счетное подмножество $S \subset \mathbb{C}P^1$, что для любой индуцированной комплексной структуры $L \in \mathbb{C}P^1 \backslash S$ в комплексном многообразии $(M, L)$ нет компактных дивизоров, а все компактные комплексные подмногообразия $Z \subset (M, L)$ коразмерности два являются трианалитическими.*

*Доказательство.* Пусть $L \in \mathbb{C}P^1 \backslash S$ и рассмотрим дивизор $Z$ в многообразии $(M, L)$, то есть компактное $L$-комплексное подмногообразие комплексной размерности $2n-1$. Тогда из 3.3.2 следует, что $\dim_{\mathbb{C}}(TZ \cap J(TZ)) > 2n-2$. Так как $TZ \cap J(TZ)$ является $\mathbb{H}$-инвариантным подрасслоением, то последнее неравенство означает, что размерность равна $2n$, что невозможно. Поэтому в $(M, L)$ нет дивизоров.

Аналогично, если $\dim_{\mathbb{C}} Z = 2n-2$, то мы имеем $\dim_{\mathbb{C}}(TZ \cap J(TZ)) > 2n-4$. Из этого следует, что $\dim_{\mathbb{C}}(TZ \cap J(TZ)) = 2n-2$, то есть $TZ$ является $\mathbb{H}$-инвариантным, и $Z$ трианалитическое. Это завершает доказательство теоремы. □

*Замечание* 3.3.4. Отметим, что существование HKT-метрики было существенным для доказательства основной теоремы. Остается неясным, можно ли отбросить это условие.

С другой стороны, условие того, что голономия связности Обаты должна содержаться в $SL(n, \mathbb{H})$ необходимо. Можно построить примеры HKT-многообразий с нечетномерными подмногообразиями для всех индуцированных комплексных структур. Многообразия с HKT-структурой на компактных группах Ли, построенные Джойсом в [29], дают такой пример: известно (см., например, [63]) что все эти многообразия допускают расслоение на торы с рациональной базой, так что все они содержат дивизоры.

Без условия существования HKT-метрики мы можем доказать отсутствие голоморфных лагранжевых подмногообразий в многообразии с общей индуцированной комплексной структурой (определение лагранжевых подмногообразий см. в разделе 1.4):

**Теорема 3.3.5.** *Пусть $(M, I, J, K)$ является $SL(n, \mathbb{H})$-многообразием. Тогда существует такое счетное подмножество $S \subset \mathbb{C}P^1$, что для любой индуцированной комплексной структуры $L \in \mathbb{C}P^1 \backslash S$, многообразие $(M, L)$ не содержит компактных голоморфных лагранжевых подмногообразий.*

*Доказательство.* Для любого голоморфного лагранжева подмногообразия $X \subset (M, I)$ имеем $TX \cap J(TX) = 0$, так как $TX \subset TM$ — лагранжево подпространство для любой кватернионно-эрмитовой метрики. Поэтому 3.3.5 немедленно следует из 3.3.2 (см. также 3.2.6). □

*Замечание* 3.3.6. В заключение этой главы сделаем следующее замечание. Пусть $X$ — пространство твисторов компактного гиперкомплексного $SL(n, \mathbb{H})$-многообразия с HKT-метрикой. Из доказанной выше теоремы 3.3.3 следует, что $X$ не допускает кэлеровой метрики. Действительно, $X$ не может быть алгебраическим, так как содержит неалгебраические подмногообразия. Но если бы $X$ было кэлеровым, то оно автоматически было бы алгебраическим, так как на $X$ нет голоморфных $k$-форм для $k > 0$ (и поэтому $h^{2,0} = h^{0,2} = 0$). Последнее следует из того, что $X$ заметается рациональными кривыми с обильным нормальным расслоением. Предположительно, пространство твисторов любого гиперкомплексного многообразия не допускает кэлеровой метрики (это следовало бы аналогичным образом из результатов работы [59] в случае, если верна гипотеза о несуществовании экзотических гиперкомплексных структур, которая обсуждается в этой работе).

Глава 4

# Голоморфные лагранжевы расслоения на гиперкомплексных многообразиях

В этой главе мы используем HKT-метрику для получения некоторой информации о гиперкомплексном многообразии. А именно, мы построим кэлерову метрику на базе голоморфного лагранжева расслоения, тотальное пространство которого является HKT-многообразием (теорема 4.3.3). Отметим, что само понятие "голоморфное лагранжево расслоение" определяется не вполне очевидным образом, так как HKT-многообразие не обязательно является голоморфно-симплектическим. Это понятие было определено в работе [22] с использованием теории калибраций и при выполнении некоторых ограничений на голономию связности Обаты. Такие расслоения часто встречаются в примерах ([22]; см. также раздел 4.4). Обзор результатов по голоморфным лагранжевым расслоениям на гиперкэлеровых многообразиях можно найти, например в [45]. Более общая гиперкомплексная версия этой геометрии еще недостаточно развита, но впоследствии может оказаться не менее интересной.

Доказанное в этой главе свойство лагранжевых расслоений можно использовать для построения примеров многообразий, не допускающих HKT-метрик. Такие примеры построены в конце этой главы.

Сделаем одно замечание по поводу существования HKT-метрики на гиперкомплексных многообразиях. Первые примеры гиперкомплексных многообразий, не допускающих HKT-метрики появились в работе Фино и Гранчарова [16]. После этого в работе [4] была дана полная классификация гиперкомплексных нильмногообразий с HKT-метрикой. При этом большинство нильмногообразий, как оказалось, такой метрики не допускают. Теорема, доказательству которой посвящена эта глава, позволяет строить другие примеры многообразий, не допускающих HKT-метрики. Результаты этой главы опубликованы в работе [49].

В разделе 4.1 мы напомним определение и свойства кватернионного комплекса Дольбо. В разделе 4.2 мы докажем необходимые нам свойства голоморфной лагранжевой калибрации. В разделе 4.3 мы определим голоморфные лагранжевы расслоения и докажем основную теорему. В разделе 4.4 мы определим кватернионный дубль комплексного аффинного многообразия с целочисленной монодромией и построим примеры гиперкомплексных многообразий, не допускающих HKT-метрики.

## 4.1. Кватернионный комплекс Дольбо

В этой главе мы рассматриваем компактные гиперкомплексные многообразия, то есть такие компактные многообразия $M$, на которых задана тройка комплексных структур $I$, $J$, $K$, ведущих себя как кватернионы: $IJ = -JI = K$ (см. определение 1.1.2).

Напомним, что каждое такое многообразие обладает канонической связностью в касательном расслоении — связностью Обаты. Все сведения об этой связности, необходимые в дальнейшем, можно найти в разделе 1.2

Напомним также, что любая почти-комплексная структура вида $L = aI + bJ + cK$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, является интегрируемой, так как она параллельна относительно связности Обаты, которая не имеет кручения. Таким образом, мы имеем семейство комплексных многообразий $(M, L)$, параметризованное точками проективной прямой $L \in \mathbb{C}P^1$.

Пусть вещественная размерность рассматриваемого гиперкомплексного многообразия $(M, I, J, K)$ равна $4n$. Гиперкомплексная структура индуцирует действие группы $SU(2)$ во всех тензорных расслоениях над $M$. Напомним, что любое неприводимое комплексное представление группы $SU(2)$ имеет вид $S^kU$, где $U$ обозначает стандартное двумерное представление, а $S^k$

— это симметрическая степень. Мы будем говорить, что всякое представление вида $\left(S^k(U)\right)^{\oplus m}$ (для произвольного $m$) является представлением (или $SU(2)$-модулем) веса $k$.

Сделаем следующее замечание, касающееся весового разложения внешней алгебры $\Lambda^*_{\mathbb{C}} M = \Lambda^* M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Во-первых заметим, что $\Lambda^1_{\mathbb{C}} M$ является $SU(2)$-модулем веса один. Как следует из формулы Клебша-Гордана, расслоение $\Lambda^k_{\mathbb{C}} M$ является суммой представлений веса $\leq k$. В силу двойственности, то же самое верно и относительно $\Lambda^{4n-k}_{\mathbb{C}} M$. Обозначим через $\Lambda^k_+ M$ максимальное подпредставление в $\Lambda^k_{\mathbb{C}} M$ веса $k$ для $k \leq 2n$, соответственно веса $4n-k$ для $k > 2n$. Обозначим через $\Pi_+ \colon \Lambda^* M \to \Lambda^*_+ M$ оператор эквивариантной проекции на компоненту максимального веса.

Заметим, что разложение Ходжа относительно произвольной комплексной структуры (можно выбрать $I$ без потери общности) согласовано с весовым разложением:

$$\Lambda^k_+ M = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}_{I,+} M,$$

где $\Lambda^{p,q}_{I,+} M = \Lambda^{p,q}_I M \cap \Lambda^k_+ M$. Это фактически весовое разложение представления группы $SU(2)$, соответствующее картановской подгруппе содержащей комплексную структуру $I$. Таким образом, $\Lambda^k_+ M$ порождено подрасслоением $\Lambda^{k,0}_{I,+} M = \Lambda^{k,0}_I M$ как $SU(2)$-модуль. Из этого также следует, что слагаемые $\Lambda^{p,q}_{I,+} M$ имеют одинаковую размерность, и изоморфны $\Lambda^{p+q,0}_I M$. Мы будем обозначать эти изоморфизмы следующим образом:

$$\mathcal{R}_{p,q} \colon \Lambda^{p+q,0}_I M \tilde{\to} \Lambda^{p,q}_{I,+} M,$$

см. [61] а также формулу 4.2.2 ниже.

Если на $M$ задана гиперэрмитова метрика $g$, то мы можем рассмотреть соответствующие 2-формы $\omega_I$, $\omega_J$ и $\omega_K$. Легко проверить, что 2-форма

$$\Omega_I = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$$

принадлежит $\Lambda^{2,0}_I M$. Если $d\Omega_I = 0$, то многообразие $M$ называется гиперкэлеровым. Из этого условия следует, что метрика $g$ является кэлеровой по отношению к любой индуцированной комплексной структуре. Если $\Omega_I$ удовлетворяет более слабому условию $\partial\Omega_I = 0$, то $M$ называется HKT-многообразием, а метрика $g$ называется HKT-метрикой (HKT означает "HyperKähler with Torsion", то есть гиперкэлерова с кручением; см. раздел 1.3).

Мы можем переформулировать условие, определяющее HKT-метрику следующим образом. Обозначим через $d_+ \colon \Lambda^k_+ M \to \Lambda^{k+1}_+ M$ композицию $\Pi_+ \circ d$ дифференциала де Рама и проекции на дифференциальные формы максимального веса. Заметим, что $\omega_I \in \Lambda^{1,1}_{I,+} M$. Тогда по теореме 5.7 из [56], условие $\partial\Omega_I = 0$ эквивалентно тому, что

$$d_+ \omega_I = 0. \tag{4.1.1}$$

Другими словами, гиперэрмитова метрика $g$ является HKT-метрикой тогда и только тогда, когда $SU(2)$-вес внешнего дифференциала $d\omega_I$ равен единице. Это наблюдение будет важно для доказательства основной теоремы.

## 4.2. Голоморфная лагранжева калибрация

Как было сказано выше, голономия связности Обаты на гиперкомплексном многообразии является подгруппой $GL(n, \mathbb{H})$. Если голономия связности Обаты содержится в $SL(n, \mathbb{H})$, то $M$ называется $SL(n, \mathbb{H})$-многообразием (определение этой подгруппы и более подробную информацию об $SL(n, \mathbb{H})$-многообразиях можно найти в разделе 1.2). Из определения немедленно следует (подробности см. в [60], утверждение 1.1), что на $SL(n, \mathbb{H})$-многообразии каноническое расслоение $\Lambda^{2n,0}_I M$ является плоским относительно связности Обаты. Кроме того ([60], утверждение 1.2), любое параллельное сечение расслоения $\Lambda^{2n,0}_I M$ является голоморфным. Можно также доказать, что если $(M, I, J, K)$ является компактным HKT-многообразием, то условие $\mathrm{Hol}(M) \subset SL(n,\mathbb{H})$ эквивалентно условию голоморфной тривиальности канонического расслоения ([60], теорема 2.3).

Обозначим через $\Phi_I \in \Lambda_I^{2n,0}M$ параллельное сечение, и будем называть его голоморфной формой объема. Заметим, что оператор $J$ определяет вещественную структуру (то есть комплексно-антилинейную инволюцию) на $\Lambda_I^{2n,0}M$, следующим образом: $\eta \mapsto \overline{J\eta}$. Мы можем предполагать, что форма $\Phi_I$ вещественна относительно этой структуры.

Если дано $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие $M$ с гиперэрмитовой метрикой $g$ и голоморфной формой объема $\Phi_I$, то обозначим через $\Omega_I = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$ форму типа $(2,0)$ относительно $I$, ассоциированную с метрикой. В работе [22], было построено несколько калибраций (определение и общее обсуждение теории калибраций см. в разделе 1.4) на $SL(n,\mathbb{H})$-многообразиях В частности, было показано, что форма

$$\Psi = (-\sqrt{-1})^n \mathcal{R}_{n,n}(\Phi_I) \in \Lambda_{I,+}^{n,n}M \tag{4.2.1}$$

является калибрацией по отношению к некоторой метрике, конформно эквивалентной $g$. Было показано, что эта форма калибрует $\Omega_I$-лагранжевы подмногообразия в $M$. Напомним, что комплексное (по отношению к комплексной структуре $I$) подмногообразие $N \subset M$ комплексной размерности $n$ называется $\Omega_I$-лагранжевым, если ограничение формы $\Omega_I$ на гладкую часть $N$ равно нулю. Это условие равносильно следующему: $T_xN$ ортогонально к $J(T_xN)$ относительно метрики $g$ в любой гладкой точке $x \in N$. Для доказательства заметим, что для пары векторных полей $X, Y \in T_I^{1,0}M$ имеем $\Omega_I(X,Y) = 2g(JX,Y)$.

Нам не понадобится конструкция из работы [22] в полной общности, а только некоторые основные свойства формы $\Psi$. Эти свойства сформулированы в следующей лемме (доказательство, приведенное ниже независимо и отличается от того, которое дано в [22]).

**Лемма 4.2.1.** *Рассмотрим $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие $(M,I,J,K)$ вещественной размерности $4n$, с голоморфной формой объема $\Phi_I \in \Lambda_I^{2n,0}M$, и $\Psi = (-\sqrt{-1})^n \mathcal{R}_{n,n}(\Phi_I) \in \Lambda_{I,+}^{n,n}M$. Пусть $N \subset M$ является $I$-комплексным подмногообразием, $\dim_{\mathbb{C}} N = n$, таким что $T_xN \cap J(T_xN) = 0$ во всех гладких точках $x \in N$. Тогда:*

1. *$d\Psi = 0$,*

2. *$\Psi|_N$ — строго положительная форма объема на гладкой части $N$.*

*Доказательство.* 1. Как было сказано выше (см. также формулу 4.2.2), оператор $\mathcal{R}_{n,n}$ индуцирован $SU(2)$-действием на внешней алгебре многообразия $M$. Так как связность Обаты $\nabla$ сохраняет гиперкомплексную структуру, то она коммутирует с этим $SU(2)$-действием, а значит и с оператором $\mathcal{R}_{n,n}$. Выше было объяснено, что $\nabla\Phi_I = 0$, поэтому также и $\nabla\Psi = 0$. Связность Обаты не имеет кручения, так что из последнего равенства следует $d\Psi = 0$.

2. Пусть $x \in N$ — гладкая точка. Из предположений леммы следует, что можно выбрать такой базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $T_{I,x}^{1,0}N$, что $e_1, \ldots, e_n, J\bar{e}_1, \ldots, J\bar{e}_n$ образуют базис пространства $T_{I,x}^{1,0}M$. Чтобы доказать строгую положительность формы $\Psi|_N$, вычислим значение $\Psi$ на поливекторе $\xi = (-\sqrt{-1})^n e_1 \wedge \bar{e}_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge \bar{e}_n \in \Lambda_I^{n,n}(T_xM)$.

Будем пользоваться следующим явным описанием оператора $\mathcal{R}_{n,n}$. Рассмотрим операторы: $\mathcal{H} = -\sqrt{-1}I$, $\mathcal{X} = \frac{1}{2}(\sqrt{-1}K - J)$ и $\mathcal{Y} = \frac{1}{2}(\sqrt{-1}K + J)$, которые действуют на $\Lambda^1_{\mathbb{C}}M$. Несложное вычисление показывает, что эти операторы удовлетворяют стандартным $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ соотношениям: $[\mathcal{X},\mathcal{Y}] = \mathcal{H}$, $[\mathcal{H},\mathcal{X}] = 2\mathcal{X}$, $[\mathcal{H},\mathcal{Y}] = -2\mathcal{Y}$. Кроме того,

$$\mathcal{H}|_{\Lambda_I^{1,0}M} = 1, \quad \mathcal{X}|_{\Lambda_I^{1,0}M} = 0, \quad \mathcal{Y}|_{\Lambda_I^{1,0}M} = J,$$

$$\mathcal{H}|_{\Lambda_I^{0,1}M} = -1, \quad \mathcal{X}|_{\Lambda_I^{0,1}M} = -J, \quad \mathcal{Y}|_{\Lambda_I^{0,1}M} = 0.$$

Можно продолжить операторы $\mathcal{H}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ как дифференцирования на всю внешнюю алгебру. Тогда получим, что

$$\mathcal{R}_{n,n} = \mathcal{Y}^n, \tag{4.2.2}$$

и

$$\langle \Psi, \xi \rangle = (-\sqrt{-1})^n \langle \mathcal{Y}^n \Phi_I, \xi \rangle = (\sqrt{-1})^n \langle \Phi_I, \mathcal{Y}^n \xi \rangle.$$

Заметим, что $\mathcal{Y}|_{T_I^{1,0}M} = 0$, $\mathcal{Y}|_{T_I^{0,1}M} = J$, и так как $\mathcal{Y}$ действует как дифференцирование, то

$$\mathcal{Y}^n \xi = n!(-\sqrt{-1})^n e_1 \wedge J\bar{e}_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge J\bar{e}_n.$$

Форма объема $\Phi_I = a\, e_1^* \wedge J\overline{e_1^*} \wedge \cdots \wedge e_n^* \wedge J\overline{e_n^*}$ для некоторого положительного вещественного числа $a$, и мы видим, что $\langle \Psi, \xi \rangle > 0$. $\square$

## 4.3. Голоморфные лагранжевы расслоения на $SL(n, \mathbb{H})$-многообразиях

Напомним, что голоморфное лагранжево подмногообразие в $SL(n, \mathbb{H})$-многообразии — это подмногообразие, калиброванное относительно формы $\Psi$ из леммы 4.2.1 (см. также раздел 1.4). Мы будем рассматривать лагранжевы расслоения на $SL(n, \mathbb{H})$-многообразиях с HKT-метрикой.

**Определение 4.3.1.** *Рассмотрим $SL(n, \mathbb{H})$-многообразие $M$ и пусть $\phi\colon (M, I) \to X$ — гладкое голоморфное расслоение над комплексным многообразием $X$. Оно называется голоморфным лагранжевым расслоением, если все его слои являются голоморфными лагранжевыми подмногообразиями. Мы говорим, что расслоение $\phi\colon (M, I) \to X$ гладкое, если $\phi$ является субмерсией (и следовательно, все слои гладкие).*

*Замечание* 4.3.2. Предположим, что задано произвольное гладкое голоморфное расслоение $\phi\colon (M, I) \to X$, где $M$ компактно, а $\dim_{\mathbb{C}} X = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} M$. Обозначим через $F_x$ слой отображения $\phi$ над точкой $x \in X$. Рассмотрим множество $U = \{x \in X\colon J(TF_x) \cap TF_x = 0\}$. Ясно, что $U$ является открытым подмножеством, и что все слои над $U$ можно сделать лагранжевыми, если правильным образом выбрать гиперэрмитову метрику на прообразе $U$. А именно, из условия $J(TF_x) \cap TF_x = 0$ следует, что каждый слой векторного расслоения $J(TF_x)$ проецируется изоморфно на $T_xX$ дифференциалом отображения $\phi$, поэтому мы можем поднять любую эрмитову метрику с $U$ на $J(TF_x)$. Далее мы можем однозначно доопределить эту метрику так, чтобы $J(TF_x)$ было ортогонально $TF_x$. Другими словами, множество лагранжевых слоев отображения $\phi$ открыто в $M$.

Основным результатом данной главы является следующее утверждение.

**Теорема 4.3.3.** *Пусть $M$ — компактное $SL(n, \mathbb{H})$-многообразие, и $\phi\colon (M, I) \to X$ — гладкое голоморфное лагранжево расслоение. Предположим, что на $M$ существует HKT-метрика. Тогда база $X$ кэлерова.*

*Доказательство.* Пусть $\omega_I \in \Lambda^{1,1}_I M$ обозначает кэлерову форму, а $\Psi$ — голоморфную лагранжеву калибрацию, определенную формулой 4.2.1. Рассмотрим форму

$$\Theta = \Psi \wedge \omega_I \in \Lambda^{n+1,n+1}_I M.$$

По лемме 4.2.1, $\Psi$ замкнута, поэтому имеем: $d\Theta = \Psi \wedge d\omega_I \in \Lambda^{2n+3}M$. Из формулы 4.1.1 следует, что форма $d\omega_I$ имеет вес единица, поэтому из формулы Клебша-Гордана следует, что $d\Theta$ является суммой компонент веса $2n+1$ и веса $2n-1$. Но в весовом разложении расслоения $\Lambda^{2n+3}M$ участвуют только компоненты веса, не превосходящего $2n-3$, поэтому $d\Theta$ должна быть равна нулю.

Мы построим кэлерову метрику на $X$ как прямой образ $\pi_*\Theta$, который априори является $(1,1)$-потоком на $X$. Мы должны доказать, что этот поток гладкий и строго положительный.

Рассмотрим произвольную эрмитову метрику на $X$ и обозначим через $\eta$ соответствующую $(1,1)$-форму. Мы можем домножить эту метрику на подходящую константу, так чтобы было выполнено условие $\pi^*\eta \leq \omega_I$. В этом случае получаем неравенство $\Theta = \Psi \wedge \omega_I \geq \Psi \wedge \pi^*\eta$. Неравенство сохраняется при взятии прямого образа, поэтому мы получаем $\pi_*\Theta \geq \pi_*(\Psi \wedge \pi^*\eta)$.

Для любой тест-формы $\alpha \in \Lambda_I^{n-1,n-1}X$ мы имеем по определению:

$$\int\limits_X \pi_*(\Psi \wedge \pi^*\eta) \wedge \alpha = \int\limits_M \Psi \wedge \pi^*\eta \wedge \pi^*\alpha$$
$$= \int\limits_M \Psi \wedge \pi^*(\eta \wedge \alpha) = \int\limits_X \pi_*\Psi \wedge \eta \wedge \alpha.$$

Таким образом, имеется неравенство $\pi_*\Theta \geq \pi_*(\Psi) \wedge \eta$, где $\pi_*(\Psi)$ — замкнутый 0-поток на $X$, то есть константа. Убедимся в том, что эта константа положительна. Для этого выберем $\alpha = \eta^{n-1}$ и заметим, что $\Psi \wedge \pi^*(\eta^n)$ — гладкая положительная форма максимальной степени на $M$. Достаточно проверить, что эта форма ненулевая в какой-то точке $x \in M$. По предположению теоремы $x$ является некритической точкой отображения $\pi$, поэтому касательное пространство в этой точке раскладывается в прямую сумму $T_xM = V_0 \oplus V_1$, где $V_0$ — касательное пространство к слою, а $V_1$ — произвольное дополнительное к нему подпространство. Так как $\pi^*\eta^n|_{V_0} = 0$ и $\pi^*\eta^n|_{V_1}$ — форма объема на $V_1$, нам необходимо проверить, что $\Psi|_{V_0}$ не равно нулю. Но это следует из второй части леммы 4.2.1, поскольку слой лагранжев.

Остается проверить, что $\pi_*\Theta$ является гладким потоком. Это следует из предположения о том, что отображение $\phi\colon (M, I) \to X$ является субмерсией. В этом случае мы можем выбрать разложение $TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, где $\mathcal{V}$ — подрасслоение, касательное к слоям $\phi$. Используя это разложение мы можем поднимать векторные поля с $X$ на $M$. Обозначим через $F_x$ слой $\phi^{-1}(x)$ над точкой $x \in X$. Рассмотрим $(1,1)$-форму $\theta$ на $X$, которая определяется следующим образом:

$$\theta(\xi, \overline{\eta})_x = \int\limits_{F_x} (\pi^*\xi) \lrcorner (\pi^*\overline{\eta}) \lrcorner \Theta,$$

где $\xi, \eta \in T^{1,0}X$ и $\pi^*\xi$, $\pi^*\eta$ обозначают подъем соответствующих векторных полей в расслоение $\mathcal{H}$. Заметим, что $\theta$ на самом деле не зависит от выбора $\mathcal{H}$, потому что свертка $\Theta$ с вертикальным векторным полем из $\mathcal{V}$ дает дифференциальную форму, которая ограничивается тривиально на каждый слой. Форма $\theta$ совпадает с $\pi_*\Theta$ как поток, по теореме Фубини. Но $\theta$ по определению гладкая. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

*Замечание* 4.3.4. Заметим, что для голоморфного лагранжева расслоения $\phi\colon (M, I) \to X$, не являющегося гладким, аналогичный приводимому выше аргумент показывает, что $\pi_*(\Theta \wedge \omega_I)$ является кэлеровым потоком. Поэтому $X$ в этом случае является многообразием "класса $\mathcal{C}$" по Фуджики, если $M$ допускает НКТ-метрику (см. [15]).

## 4.4. Примеры лагранжевых расслоений

В этом разделе мы построим класс гиперкомплексных $SL(n, \mathbb{H})$-многообразий, не допускающих НКТ-метрики. Идея, которая уже появлялась в работе [32], состоит в том, чтобы рассмотреть расслоение на торы над аффинной базой.

Пусть $(X, I)$ — комплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Мы будем называть $X$ аффинным комплексным многообразием, если существует связность без кручения $D\colon TX \to TX \otimes \Lambda^1 X$, которая является плоской и сохраняет комплексную структуру: $DI = 0$.

Зафиксируем точку $x \in X$ и рассмотрим группу голономии $\operatorname{Hol}_x(D) \subset GL(T_x X)$. Мы будем называть $X$ аффинным многообразием с целочисленной монодромией, если существует решетка $\Lambda_x \subset T_x X$, сохраняемая группой голономии: $\operatorname{Hol}_x(D)\Lambda_x = \Lambda_x$. В этом случае мы можем построить подмножество $\Lambda \subset TX$ в тотальном пространстве касательного расслоения, которое получается параллельным переносом решетки $\Lambda_x$. Для любой точки $y \in X$ пересечение $\Lambda \cap T_y X$ является решеткой в $T_y X$.

Пусть $M = TX/\Lambda$, то есть $M$ — это многообразие, полученное как послойный фактор расслоения $TX$. Мы определим две антикоммутирующих комплексных структуры на $TX$, которые затем спустим на $M$. Связность $D$ определяет разложение

$$T(TX) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} \tag{4.4.1}$$

в прямую сумму вертикального подрасслоения $\mathcal{V}$, которое касается слоев проекции $TX \to X$, и горизонтального дополнения $\mathcal{H}$. Заметим, что для любой точки $(x, v) \in TX$, где $v \in T_x X$, имеются естественные изоморфизмы $\mathcal{H}_{(x,v)} \simeq T_x X \simeq \mathcal{V}_{(x,v)}$, поэтому мы можем отождествить компоненты разложения 4.4.1. Также это показывает, что комплексная структура $I$ действует естественным образом как на $\mathcal{H}$, так и на $\mathcal{V}$. Имея в виду эти наблюдения, определим пару операторов из $\mathrm{End}(T(TM))$:

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix},$$

где блочная форма соответствует разложению 4.4.1. Ясно, что эти операторы определяют пару антикоммутирующих почти-комплексных структур. Нужно проверить, что эти структуры интегрируемы. Это можно сделать локально.

Используя тот факт, что связность $D$ плоская, а структура $I$ параллельная, мы можем выбрать параллельный локальный фрейм в $TX$ вида $e_1, Ie_1, \dots e_n, Ie_n$. Так как $D$ не имеет кручения, то эти векторные поля коммутируют, поэтому они определяют локальную систему координат на $X$. Так как сечения $e_i$ и $Ie_i$ плоские, то они касаются подрасслоения $\mathcal{H}$. Поэтому они также определяют локальную систему координат на тотальном пространстве расслоения $TX$, и в этих координатах комплексные структуры $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ действуют как стандартные комплексные структуры на $\mathbb{H}^n$. Поэтому они интегрируемы.

Эта конструкция дает гиперкомплексную структуру на тотальном пространстве расслоения $TX$. Заметим, что построенная гиперкомплексная структура инвариантна относительно параллельных переносов вдоль слоев. Из этого следует, что гиперкомплексная структура спускается на $M$. Мы будем называть многообразие $M$, построенное таким образом, кватернионным дублем аффинного комплексного многообразия $X$.

Гиперкомплексная структура на кватернионном дубле $M$ локально изоморфна $\mathbb{H}^n$ по построению. Поэтому связность Обаты на этом многообразии плоская (и она по сути индуцирована плоской связностью $D$ на $X$). Так как связность $D$ сохраняет решетку в касательном расслоении, она также сохраняет голоморфную форму объема. Чтобы в этом убедиться, мы опять можем выбрать локальный фрейм $e_1, Ie_1, \dots e_n, Ie_n$, как и выше. Кроме того, можно считать, что его элементы образуют локальный базис решетки $\Lambda$, параллельный относительно связности $D$. Тогда форма объема $(e_1^* - \sqrt{-1}Ie_1^*) \wedge \dots \wedge (e_n^* - \sqrt{-1}Ie_n^*)$ корректно определена глобально и параллельна относительно $D$, поэтому голоморфна. Из этого следует, что связность Обаты на $M$ также сохраняет голоморфную относительно $I$ форму объема. Следовательно, $M$ является $SL(n, \mathbb{H})$-многообразием.

**Теорема 4.4.1.** *Пусть $M$ — кватернионный дубль аффинного комплексного многообразия $X$. Если $X$ не кэлерово, то $M$ не допускает HKT-метрики.*

*Доказательство.* Мы можем выбрать эрмитову метрику $g$ на многообразии $X$. После этого, пользуясь разложением (4.4.1), можно определить гиперэрмитову метрику $h = g \oplus g$ на $M$. По отношению к этой метрике слои проекции $M \to X$ лагранжевы, поэтому можно применить 4.3.3. $\square$

Далее мы приведем два примера аффинных комплексных многообразий с целочисленной монодромией. Отметим, что в этих примерах многообразия не будут являться кэлеровыми (вообще, любое комплексное аффинное многообразие с кэлеровой метрикой является фактором комплексного тора, что следует из теоремы Калаби-Яу и решения 18-й проблемы Гильберта полученного Бибербахом; см., например, [8]). Поэтому соответствующие кватернионные дубли не допускают НКТ-метрик.

*Пример* 4.4.2. Пусть $N$ — трехмерная вещественная группа Гейзенберга, то есть группа верхнетреугольных унипотентных матриц $3 \times 3$ с элементами из $\mathbb{R}$. Рассмотрим нильпотентную группу Ли $G = N \times \mathbb{R}$. Тогда $G$ диффеоморфна $\mathbb{C}^2$ и можно проверить (см [25], пример 2), что структуру этой группы Ли на $\mathbb{C}^2$ можно явно задать так:

$$(w_1, w_2) \cdot (z_1, z_2) = (w_1 + z_1, w_2 - \sqrt{-1}\overline{w_1} z_1 + z_2).$$

Из этой формулы видно, что левые сдвиги являются голоморфными аффинными преобразованиями $\mathbb{C}^2$, так что на $G$ есть левоинвариантная комплексная структура, сохраняемая плоской связностью без кручения. Можно выбрать решетку в $\mathbb{C}^2$, например $\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^2$. Тогда многообразие $X = \Lambda\backslash G$ (которое называется первичной поверхностью Кодаиры) будет аффинным комплексным многообразием с целочисленной монодромией.

*Пример* 4.4.3. Пусть $G$ — трехмерная комплексная группа Гейзенберга. Ее можно описать (см. [25]) как $\mathbb{C}^3$ с умножением, которое задается формулой

$$(w_1, w_2, w_3) \cdot (z_1, z_2, z_3) = (w_1 + z_1, w_2 + z_2, w_3 + z_3 + w_1 z_2).$$

Можно выбрать решетку в $G$, например $\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^3$, и рассмотреть фактор $X = \Lambda\backslash G$. Это аффинное комплексное многообразие с целочисленной монодромией (которое называется многообразием Ивасавы).

# Литература


1. Alesker S., Verbitsky M. Quaternionic Monge-Ampère equation and Calabi problem for HKT-manifolds // Israel J. Math. 2010. Vol. 176. P. 109–138.

2. Banos B., Swann A. Potentials for hyper-Kähler metrics with torsion // Classical Quantum Gravity. 2004. Vol. 21, no. 13. P. 3127–3135.

3. Barberis M. L. A survey on hyper-Kähler with torsion geometry // Rev. Un. Mat. Argentina. 2009. Vol. 49, no. 2. P. 121–131.

4. Barberis M. L., Dotti I. G., Verbitsky M. Canonical bundles of complex nilmanifolds, with applications to hypercomplex geometry // Math. Res. Lett. 2009. Vol. 16, no. 2. P. 331–347.

5. Barberis M. L., Fino A. New HKT manifolds arising from quaternionic representations // Math. Z. 2011. Vol. 267, no. 3-4. P. 717–735.

6. Bedulli L., Gori A., Podestà F. Homogeneous hyper-complex structures and the Joyce's construction // Differential Geom. Appl. 2011. Vol. 29, no. 4. P. 547–554.

7. Berger M. Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes // Bull. Soc. Math. France. 1955. Vol. 83. P. 279–330.

8. Besse A. L. Einstein manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1987. Vol. 10 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. P. xii+510. ISBN: 3-540-15279-2.

9. Bismut J.-M. A local index theorem for non-Kähler manifolds // Math. Ann. 1989. Vol. 284, no. 4. P. 681–699.

10. Boyer C. P. A note on hyper-Hermitian four-manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 102, no. 1. P. 157–164.

11. Boyer C. P., Galicki K., Mann B. M. Some new examples of compact inhomogeneous hypercomplex manifolds // Math. Res. Lett. 1994. Vol. 1, no. 5. P. 531–538.

12. Boyer C. P., Galicki K., Mann B. M. Hypercomplex structures on Stiefel manifolds // Ann. Global Anal. Geom. 1996. Vol. 14, no. 1. P. 81–105.

13. Boyer C. P., Galicki K., Mann B. M. Hypercomplex structures from 3-Sasakian structures // J. Reine Angew. Math. 1998. Vol. 501. P. 115–141.

14. Capria M. M., Salamon S. M. Yang-Mills fields on quaternionic spaces // Nonlinearity. 1988. Vol. 1, no. 4. P. 517–530.

15. Demailly J.-P., Paun M. Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold // Ann. of Math. (2). 2004. Vol. 159, no. 3. P. 1247–1274.

16. Fino A., Grantcharov G. Properties of manifolds with skew-symmetric torsion and special holonomy // Adv. Math. 2004. Vol. 189, no. 2. P. 439–450.

17. Gates S. J., Jr., Hull C. M., Roček M. Twisted multiplets and new supersymmetric nonlinear $\sigma$-models // Nuclear Phys. B. 1984. Vol. 248, no. 1. P. 157–186.

18. Gauduchon P. Hermitian connections and Dirac operators // Boll. Un. Mat. Ital. B (7). 1997. Vol. 11, no. 2, suppl. P. 257–288.

19. Grantcharov G., Papadopoulos G., Poon Y. S. Reduction of HKT-structures // J. Math. Phys. 2002. Vol. 43, no. 7. P. 3766–3782.

20. Grantcharov G., Pedersen H., Poon Y. S. Deformations of hypercomplex structures associated to Heisenberg groups // Q. J. Math. 2008. Vol. 59, no. 3. P. 335–362.

21. Grantcharov G., Poon Y. S. Geometry of hyper-Kähler connections with torsion // Comm. Math. Phys. 2000. Vol. 213, no. 1. P. 19–37.

22. Grantcharov G., Verbitsky M. Calibrations in hyper-Kähler geometry // Commun. Contemp. Math. 2013. Vol. 15, no. 2. P. 1250060, 27.

23. Gross M., Huybrechts D., Joyce D. Calabi-Yau manifolds and related geometries. Lectures at a summer school in Nordfjordeid, Norway, June 2001. Berlin: Springer, 2003. P. viii + 239. ISBN: 3-540-44059-3/pbk.

24. Harvey R., Lawson H. B., Jr. Calibrated geometries // Acta Math. 1982. Vol. 148. P. 47–157.

25. Hasegawa K. Complex and Kähler structures on compact homogeneous manifolds—their existence, classification and moduli problem // Singularities—Niigata–Toyama 2007. Tokyo: Math. Soc. Japan, 2009. Vol. 56 of Adv. Stud. Pure Math. P. 151–167.

26. Howe P. S., Papadopoulos G. Twistor spaces for hyper-Kähler manifolds with torsion // Phys. Lett. B. 1996. Vol. 379, no. 1-4. P. 80–86.

27. Ivanov S., Petkov A. HKT manifolds with holonomy $\mathrm{SL}(n, H)$ // Int. Math. Res. Not. IMRN. 2012. no. 16. P. 3779–3799.

28. Joyce D. The hypercomplex quotient and the quaternionic quotient // Math. Ann. 1991. Vol. 290, no. 2. P. 323–340.

29. Joyce D. Compact hypercomplex and quaternionic manifolds // J. Differential Geom. 1992. Vol. 35, no. 3. P. 743–761.

30. Kaledin D. Integrability of the twistor space for a hypercomplex manifold. // Sel. Math., New Ser. 1998. Vol. 4, no. 2. P. 271–278.

31. Kato M. Compact differentiable 4-folds with quaternionic structures // Math. Ann. 1980. Vol. 248, no. 1. P. 79–96.

32. Kontsevich M., Soibelman Y. Homological mirror symmetry and torus fibrations // Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000). World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. P. 203–263.

33. Merkulov S., Schwachhöfer L. Addendum to: "Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections" // Ann. of Math. (2). 1999. Vol. 150, no. 3. P. 1177–1179.

34. Merkulov S., Schwachhöfer L. Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections // Ann. of Math. (2). 1999. Vol. 150, no. 1. P. 77–149.

35. Obata M. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure // Jap. J. Math. 1956. Vol. 26. P. 43–77.

36. Obata M. Affine transformations in an almost complex manifold with a natural affine connection // J. Math. Soc. Japan. 1956. Vol. 8. P. 345–362.

37. Obata M. Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure // J. Math. Soc. Japan. 1957. Vol. 9. P. 406–416.

38. Obata M. Hermitian manifolds with quaternion structure // Tôhoku Math. J. (2). 1958. Vol. 10. P. 11–18.

39. Pedersen H., Poon Y. S. Deformations of hypercomplex structures // J. Reine Angew. Math. 1998. Vol. 499. P. 81–99.

40. Pedersen H., Poon Y. S. Inhomogeneous hypercomplex structures on homogeneous manifolds // J. Reine Angew. Math. 1999. Vol. 516. P. 159–181.

41. Pedersen H., Poon Y. S., Swann A. F. Hypercomplex structures associated to quaternionic manifolds // Differential Geom. Appl. 1998. Vol. 9, no. 3. P. 273–292.

42. Salamon S. Quaternionic Kähler manifolds // Invent. Math. 1982. Vol. 67, no. 1. P. 143–171.

43. Salamon S. M. Differential geometry of quaternionic manifolds // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1986. Vol. 19, no. 1. P. 31–55.

44. Samelson H. A class of complex-analytic manifolds // Portugaliae Math. 1953. Vol. 12. P. 129–132.

45. Sawon J. Abelian fibred holomorphic symplectic manifolds // Turkish J. Math. 2003. Vol. 27, no. 1. P. 197–230.

46. Simons J. On the transitivity of holonomy systems // Ann. of Math. (2). 1962. Vol. 76. P. 213–234.

47. Soldatenkov A. Holonomy of the Obata connection on $SU(3)$ // Int. Math. Res. Not. 2012. no. 15. P. 3483–3497.

48. Soldatenkov A., Verbitsky M. Subvarieties of hypercomplex manifolds with holonomy in $SL(n, \mathbb{H})$ // J. Geom. Phys. 2012. Vol. 62, no. 11. P. 2234–2240.

49. Soldatenkov A., Verbitsky M. Holomorphic Lagrangian fibrations on hypercomplex manifolds // Int. Math. Res. Not. First published online: October 31, 2013. doi:10.1093/imrn/rnt218.

50. Sommese A. J. Quaternionic manifolds // Math. Ann. 1974/75. Vol. 212. P. 191–214.

51. Spindel P., Sevrin A., Troost W., Van Proeyen A. Extended supersymmetric $\sigma$-models on group manifolds. I. The complex structures // Nuclear Phys. B. 1988. Vol. 308, no. 2-3. P. 662–698.

52. Strominger A. Superstrings with torsion // Nuclear Phys. B. 1986. Vol. 274, no. 2. P. 253–284.

53. Swann A. Twisting Hermitian and hypercomplex geometries // Duke Math. J. 2010. Vol. 155, no. 2. P. 403–431.

54. Verbitsky M. Tri-analytic subvarieties of hyper-Kaehler manifolds // Geom. Funct. Anal. 1995. Vol. 5, no. 1. P. 92–104.

55. Verbitsky M. Hypercomplex varieties // Comm. Anal. Geom. 1999. Vol. 7, no. 2. P. 355–396.

56. Verbitsky M. HyperKähler manifolds with torsion, supersymmetry and Hodge theory // Asian J. Math. 2002. Vol. 6, no. 4. P. 679–712.

57. Verbitsky M. Hyperkähler manifolds with torsion obtained from hyperholomorphic bundles // Math. Res. Lett. 2003. Vol. 10, no. 4. P. 501–513.

58. Verbitsky M. Subvarieties in non-compact hyperKähler manifolds // Math. Res. Lett. 2004. Vol. 11, no. 4. P. 413–418.

59. Verbitsky M. Hypercomplex structures on Kähler manifolds // Geom. Funct. Anal. 2005. Vol. 15, no. 6. P. 1275–1283.

60. Verbitsky M. Hypercomplex manifolds with trivial canonical bundle and their holonomy // Moscow Seminar on Mathematical Physics. II. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. Vol. 221 of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. P. 203–211.

61. Verbitsky M. Quaternionic Dolbeault complex and vanishing theorems on hyperkähler manifolds // Compos. Math. 2007. Vol. 143, no. 6. P. 1576–1592.

62. Verbitsky M. Balanced HKT metrics and strong HKT metrics on hypercomplex manifolds // Math. Res. Lett. 2009. Vol. 16, no. 4. P. 735–752.

63. Verbitsky M. Positive toric fibrations // J. Lond. Math. Soc. (2). 2009. Vol. 79, no. 2. P. 294–308.

64. Verbitsky M. Positive forms on hyperkähler manifolds // Osaka J. Math. 2010. Vol. 47, no. 2. P. 353–384.

65. Whitney H. Elementary structure of real algebraic varieties // Ann. of Math. (2). 1957. Vol. 66. P. 545–556.

66. Whitt L. Quaternionic Kaehler manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272, no. 2. P. 677–692.