

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт проблем передачи информации им А. А. Харкевича РАН

На правах рукописи  
УДК 512.815.2, 512.664.1, 512.723

Нетай Игорь Витальевич

## Сизигии некоторых вложений Сегре и Веронезе

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических  
наук, доцент А. Л. Городенцев

Москва — 2013

# Содержание

<b>Глава 1. Введение</b> . . . . .	3
1.1. Постановка задачи . . . . .	3
1.2. Основные результаты диссертации . . . . .	6
<b>Глава 2. Предварительные сведения</b> . . . . .	9
2.1. Комплекс Кошуля . . . . .	9
2.2. Проективные координатные алгебры . . . . .	10
2.3. Когомологии алгебр Ли . . . . .	11
2.4. Резольвенты пучков . . . . .	12
<b>Глава 3. Обозначения и комбинаторика</b> . . . . .	17
3.1. Комбинаторные кубы . . . . .	17
3.2. Представления . . . . .	18
3.3. Диаграммы . . . . .	21
<b>Глава 4. Изотипические компоненты комплекса Кошуля</b> . . . . .	26
4.1. Вложение Сегре . . . . .	26
4.2. Квадратичное вложение Веронезе . . . . .	35
<b>Приложение А. Представления с простым спектром</b> . . . . .	40
А.1. Классификация представлений со свойствами 3.2.1 и 3.2.2 . . . . .	40
<b>Приложение Б. Взвешенные проективные пространства</b> . . . . .	42
<b>Приложение В. Примеры</b> . . . . .	43
В.1. Сизигии . . . . .	43
В.2. Резольвенты пучков . . . . .	46
Публикации по теме диссертации . . . . .	47
Список литературы . . . . .	47

# Глава 1

## Введение

### 1.1. Постановка задачи

Работа посвящена вычислению сизигий некоторых однородных пространств.

Для любого проективного многообразия  $X \subset \mathbb{P}(W)$  рассмотрим проективную координатную алгебру  $A = S/\mathbb{I}(X)$  как градуированный  $S$ -модуль, где  $S = \mathbb{k}[W]$  — алгебра многочленов на пространстве  $W$  и  $\mathbb{I}(X)$  — однородный идеал многообразия  $X$ . Существует резольвента

$$\dots \xrightarrow{d} F_2 \xrightarrow{d} F_1 \xrightarrow{d} F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

являющаяся точной последовательностью свободных градуированных  $S$ -модулей. По теореме Гильберта о сизигиях [5], если выбирать минимальный набор образующих в ядрах, то процесс оборвётся, и мы получим конечную свободную резольвенту. В каждом таком модуле  $F_p$  выберем минимальный набор образующих и породим ими векторное пространство. Обозначим через  $R_{p,q}$  его  $q$ -ую однородную компоненту. Обозначим через  $(p)$  сдвиг градуировки на  $p$ , то есть прибавление  $p$  к степени каждого элемента модуля. Тогда

$$F_p = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} R_{p,q} \otimes_{\mathbb{k}} S(q).$$

Резольвента минимальна, если все однородные компоненты дифференциала  $d$  имеют положительные степени. Пространство  $R_{p,q}$  для минимальной резольвенты называется *пространством  $p$ -ых сизигий степени  $q$* . Следовательно, тензорное умножение на тривиальный  $S$ -модуль  $\mathbb{k}$  аннулирует все дифференциалы в минимальной свободной резольвенте, и мы получаем

$$R_{p,q} = (\mathrm{Tor}_p^S(A, \mathbb{k}))_q, \quad (1.1)$$

откуда следует, что пространства сизигий не зависят от выбора резольвенты. Пространство  $(\mathrm{Tor}_p^S(A, \mathbb{k}))_q$  —  $q$ -ая однородная компонента градуированного векторного пространства  $\mathrm{Tor}_p^S(A, \mathbb{k})$ .

В общем случае вычисление сизигий является очень трудной задачей. Остаются неразрешённые вопросы даже для проективных кривых. В случае

нормальной рациональной кривой в проективном пространстве очень хорошо известен ответ (см. пример 2.4.5, а также [6, 26]). Для нормальной эллиптической кривой минимальная резольвента может быть найдена в [6]. Для кривых рода  $n$  в общем случае вопрос остаётся открытым. В работе [7] доказано, если для канонического вложения гладкой кривой  $C$  рода  $g$  в проективное пространство  $\mathbb{P}^{g-1}$  пространство  $(\text{Tor}_{g-2}(I, \mathbb{k}))_{g-4} \neq 0$ , то кривая  $C$  тригональна и лежит на двумерном рациональном нормальном свитке  $X$  (см. [26]), где  $I$  — однородный идеал кривой  $C$ .

Отдельной широкой областью исследования является изучение так называемого  $N_p$ -свойства. Свойство  $N_p$  состоит в том, что  $R_{i,j} = 0$  для  $j \neq i+1$  и  $1 \leq i \leq p$ , а также  $R_{0,j} = 0$  при  $j \neq 0$  и  $R_{0,0} = \mathbb{k}$ . В частности,  $N_0$  означает проективную нормальность,  $N_1$  означает, что многообразие  $X$  является пересечением квадрик и так далее. Это свойство введено в [17]. В работе [9] исследовано свойство  $N_p$  для вложений Веронезе. В работе [10] исследуется  $N_6$ -свойство кубического вложения Веронезе. В работе [11] исследовано свойство  $N_p$  для вложений Сегре. В работе [12] свойство  $N_p$  исследовано для флаговых многообразий. В работе [13] исследуется связь свойства  $N_p$  для многообразия в проективном пространстве и для его плоских сечений.

Допустим, группа  $G \subseteq \text{GL}(W)$  линейно действует на проективном пространстве  $\mathbb{P}(W)$  и сохраняет многообразие  $X \subset \mathbb{P}(W)$ . Значит, группа  $G$  сохраняет и идеал  $\mathbb{I}(X)$ . Отсюда можно получить действие  $G$  на минимальной резольвенте и на пространствах сизигий. Таким образом, пространства сизигий можно описывать как представления группы  $G$ .

В работе [8] найдены алгебры сизигий плюккеровых вложений грассманианов  $\text{Gr}(2, n)$ , и описаны представления группы  $\text{GL}(n)$  в пространствах сизигий. (На прямой сумме пространств сизигий любого проективного многообразия существует естественная структура алгебры.) В работе [14] показано, что сизигии вложения Сегре произведения нескольких проективных пространств могут быть порождены конечным набором «семейств соотношений» (то есть соотношений, из которых все сизигии получаются заменами переменных), не зависящим от количества проективных пространств.

В данной работе мы исследуем вложение Сегре произведения двух проективных пространств и квадратичное вложение Веронезе. Пространства сизигий этих вложений описываются теоремами 1.2.2 и 1.2.4. В замечании 4.1.11 мы доказываем некоторое свойство умножения в сумме пространств сизигий

вложения Сегре.

Широко исследуются сизигии детерминантальных многообразий и идеалов. Допустим,  $V$  — некоторое пространство матриц, и в алгебре  $\mathbb{k}[V]$  задан идеал  $I$ , порождённый минорами матриц. Например, если  $V$  — пространство симметрических матриц, а идеал  $I$  порождён всеми  $2 \times 2$ -минорами, то идеал  $I$  является однородным идеалом квадратичного вложения Веронезе  $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ , где  $V = \text{Sym}^2 W$ . Сизигии идеалов определяются аналогичным образом. Если  $I$  — однородный идеал в алгебре  $\mathbb{k}[V]$ , то положим  $R_{p,q} = \left( \text{Tor}_p^{\mathbb{k}[V]}(I, \mathbb{k}) \right)_q$ . Аналогичным образом можно определять сизигии градуированных модулей над  $\mathbb{k}[V]$ . В работе [18] исследуются свойства детерминантальных идеалов методами теории колец. В данной работе мы исследуем сизигии некоторых естественно геометрически возникающих модулей над алгебрами  $\mathbb{k}[\text{Sym}^2 V]$  и  $\mathbb{k}[U \otimes V]$  (см. теоремы 4.1.9, 4.2.4), обобщая результаты работ [19, 20].

Рассмотрим на проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$  когерентный пучок  $\mathcal{F}$ . Обозначим через  $\text{coh}(X)$  категорию когерентных пучков на многообразии  $X$ , через  $\text{grmod}(S)$  — категорию конечно порождённых градуированных  $S$ -модулей. Пусть  $X \subset \mathbb{P}^N$  — проективное многообразие. Определим функтор  $F: \text{coh}(X) \rightarrow \text{grmod}(S)$  формулой

$$F(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{F}(n))(-n) = \text{Hom} \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}(-n), - \right).$$

**Определение 1.1.1.** Назовём *минимальной резольвентой* пучка  $\mathcal{F}$  последовательность

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} M_{1,q}(F(\mathcal{F})) \otimes \mathcal{O}(-q) \rightarrow \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} M_{0,q}(F(\mathcal{F})) \otimes \mathcal{O}(-q) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

где  $M_{p,q}(-) = (\text{Tor}_p(-, \mathbb{k}))_q$ . Факт, что эта последовательность является резольвентой, следует из теорем *A* и *B* работы [17]. Пространства  $M_{p,q}(F(\mathcal{F}))$  будем называть *сизигиями* пучка  $\mathcal{F}$  и будем обозначать  $R_{p,q}(\mathcal{F})$ .

Таким образом, минимальные резольвенты пучков на проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$  оказываются связаны с сизигиями градуированных модулей над  $\mathbb{k}[V]$ . Результаты о построении минимальных резольвент пучков на некоторых детерминантальных многообразиях могут быть найдены в [15]. В данной работе мы построим минимальные резольвенты пучков  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(a)$

в  $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V)$  для  $a \geq -\dim V$  и  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V)}(a, b)$  в  $\mathbb{P}(U \otimes V)$  для  $a \geq -\dim(U)$  и  $b \geq -\dim V$  (см. теоремы 4.1.9, 4.2.4).

## 1.2. Основные результаты диссертации

Диссертация состоит из четырёх глав и приложения.

Глава 1 — введение, в ней обсуждаются история вопроса и мотивировки, даётся общий обзор работы и формулируются основные результаты.

Глава 2 носит в основном вспомогательный характер и описывает технические средства, позволяющие вычислять сизигии.

В главе 3 мы вводим основные обозначения. В параграфе 3.1 мы вводим понятие обрезанного комбинаторного куба, являющегося комплексом над абелевой категорией. В параграфе 3.2 мы формулируем условия на старший вес  $\pi$  неприводимого представления редуктивной группы  $G$ , при выполнении которых сизигии допускают комбинаторное вычисление (см. свойства 3.2.1 и 3.2.2, а также предложение 3.2.3). В параграфе 3.3 мы вводим обозначения, связанные с диаграммами Юнга.

Глава 4 содержит основные вычисления и доказательства основных результатов диссертации. В параграфе 4.1 мы изучаем изотипические компоненты комплекса Кошуля, вычисляющего сизигии пучков  $\mathcal{O}(a, b)$  на  $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$ . Оказывается, что эти изотипические компоненты являются обрезанными комбинаторными кубами.

**Определение 1.2.1.** Для диаграммы Юнга  $\lambda$  обозначим  $l(\lambda)$  и  $\mathrm{wt}(\lambda)$  длину диагонали диаграммы  $\lambda$  (то есть пересечение диаграммы с множеством клеток  $\{(k, k)\}$  для всех  $k \in \mathbb{Z}$ ) и вес (то есть количество клеток  $\lambda$ ). Обозначим через  $\mathbf{e}(\lambda, k)$  диаграмму, полученную из  $\lambda$  добавлением клетки в конец каждого из первых  $k$  столбцов диаграммы  $\lambda$ . Символом  $\lambda'$  обозначим диаграмму, полученную из  $\lambda$  транспонированием. Через  $V_\lambda$  обозначим неприводимое представление группы  $\mathrm{GL}(V)$  со старшим весом  $\lambda$ .

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $R_{p,q}$  — пространства сизигий вложения Серге  $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$ . Тогда существует изоморфизм представления  $G = \mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(V)$ :

$$R_{p,q} \cong \bigoplus_{\substack{\mathrm{wt}(\lambda)=p, \\ l(\lambda)=q-p}} \left( U_{\mathbf{e}(\lambda, q-p)}^* \otimes V_{\mathbf{e}(\lambda', q-p)}^* \right).$$

Обозначения, связанные с отмеченными диаграммами Юнга  $\theta$ , диаграммами  $\lambda(\theta)$  и  $\mu(\theta)$  вводятся в параграфе 3.3. Для отмеченной диаграммы Юнга  $\theta$  множество  $B(\theta)$  определено в 3.3.2. Множество  $S(w, a, b, k)$  отмеченных диаграмм Юнга определено в параграфе 4.1.

**Теорема 1.2.3 (4.1.9).** *Рассмотрим вложение Сегре  $X = \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$ . Пусть  $a \geq -m$  и  $b \geq -n$ . Тогда существует резольвента*

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} R_{1,k+1}^{a,b} \otimes \mathcal{O}(-1-k) \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} R_{0,k}^{a,b} \otimes \mathcal{O}(-k) \longrightarrow \mathcal{O}_X(a,b) \longrightarrow 0,$$

где  $m = \dim U$ ,  $n = \dim V$  и

$$R_{p,p+q}^{a,b} = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{l^{a,b(\nu)=q} \\ \text{wt}(\nu)=p}} U_{\mathbf{e}(\nu,a+q)}^* \otimes V_{\mathbf{e}(\nu',b+q)}^*, & q > 0 \text{ или } p = q = 0; \\ \bigoplus_{\theta \in S(a,b,p,k)} \left( U_{\lambda(\theta)}^* \otimes V_{\mu(\theta)}^* \right)^{\oplus \binom{|B(\theta)|-1}{k}}, & q = 0, p > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

В параграфе 4.2 мы изучаем изотипические компоненты комплекса Кошуля, вычисляющего сизигии пучков  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(a)$  на  $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\text{Sym}^2 V)$ . Оказывается, что изотипические компоненты этого комплекса также являются обрезанными комбинаторными кубами.

**Теорема 1.2.4.** *Пусть  $R_{p,q}$  — пространства сизигий вложения Веронезе  $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\text{Sym}^2 V)$ . Тогда существует изоморфизм представлений группы  $G = \text{GL}(V)$ :*

$$R_{p,q} \cong \bigoplus_{\substack{\text{wt}(\lambda)=2p \\ l(\lambda)=2q-2p \\ \lambda=\lambda'}} V_{\lambda}^*.$$

Для диаграммы Юнга  $\lambda$  множество  $C(\lambda)$  будет определено в 3.3.7. Обозначение диаграммы Юнга  $(a_1, \dots, a_k | b_k, \dots, b_1)$  будет дано в 3.3.6.

**Теорема 1.2.5 (4.2.4).** *Пусть  $X = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\text{Sym}^2 V)$  — вложение Веронезе степени 2. Пусть  $a \geq -n$ . Тогда существует резольвента*

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} R_{1,k+1}^a \otimes \mathcal{O}(-k-1) \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} R_{0,k}^a \otimes \mathcal{O}(-k) \longrightarrow \mathcal{O}_X(a) \longrightarrow 0,$$

где  $n = \dim V$  и

$$R_{p,p+q}^a = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\omega=\omega' \\ \text{wt}(\omega)=q \\ l(\omega)=2q-a}} V_{\omega}^*, & q > 0 \text{ или } p = q = 0, \\ \bigoplus_{\substack{\omega=(a_1, \dots, a_k | b_k, \dots, b_1) \\ b_i \leq a_i \leq b_{i-1}+1, i=1, \dots, k \\ \text{wt}(\omega)=2p+a}} (V_{\omega}^*)^{\oplus \binom{|C(\omega)|-1}{s}}, & p > 0, q = 0, s \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\text{где } s = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^k |a_i - b_i - 1| - a \right).$$

Приложение А содержит классификацию старших весов представлений полупростых групп, обладающих свойствами 3.2.1 и 3.2.2. Приложение Б описывает связь результатов с сизигиями взвешенных проективных пространств. Приложение В содержит примеры и список литературы.

Автор выражает благодарность научному руководителю А. Л. Городенцеву, С. О. Горчинскому, А. Г. Кузнецову, Э. Б. Винбергу и В. М. Бухштаберу за полезные обсуждения работы.

## Глава 2

### Предварительные сведения

#### 2.1. Комплекс Кошуля

Пусть  $X \subset \mathbb{P}(W)$  — вложение проективного многообразия  $X$  в проективное пространство,  $A_q = H^0(X, \mathcal{O}(q))$  —  $q$ -ая однородная компонента проективной координатной алгебры многообразия  $X$ . Пусть  $\iota: \Lambda^{p-1}W^* \otimes W^* \rightarrow \Lambda^{p-1}W \otimes W \rightarrow \Lambda^p W$  — отображение, двойственное ко внешнему умножению  $\Lambda^{p-1}W \otimes W \rightarrow \Lambda^p W$ . При помощи умножения  $\pi_q: A_1 \otimes A_q \rightarrow A_{q+1}$  определим отображение  $d_{p,q}$  как композицию:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{p-1}W^* \otimes W^* \otimes A_q & \longrightarrow & \Lambda^{p-1}W^* \otimes A_1 \otimes A_q & (2.1) \\ \iota \otimes \text{Id} \uparrow & & \downarrow \text{Id} \otimes \pi_q & \\ \Lambda^p W^* \otimes A_q & \xrightarrow{d_{p,q}} & \Lambda^{p-1}W^* \otimes A_{q+1}, & \end{array}$$

где верхняя стрелка индуцирована естественным отображением ограничения

$$W^* = H^0(\mathbb{P}(W), \mathcal{O}(1)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}(1)) = A_1.$$

**Лемма 2.1.1.** *Цепь морфизмов*

$$\dots \longrightarrow \Lambda^{p+1}W^* \otimes A_{q-1} \xrightarrow{d_{p+1,q-1}} \Lambda^p W^* \otimes A_q \xrightarrow{d_{p,q}} \Lambda^{p-1}W^* \otimes A_{q+1} \longrightarrow \dots$$

*является комплексом. Более того, его когомологии являются пространствами сизигий*

$$R_{p,p+q} = \frac{\ker(d_{p,q})}{\text{im}(d_{p+1,q-1})}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим комплекс Кошуля  $\Lambda^\bullet W^* \otimes \text{Sym}^\bullet W^* = \Lambda^\bullet W^* \otimes S$  (см. [21], гл. 1). Он квазиизоморфен тривиальному  $S$ -модулю  $\mathbb{k}$ . Тензорно умножая над  $S$  на  $A$ , получаем квазиизоморфизм  $\Lambda^\bullet W^* \otimes A \cong \mathbb{k} \otimes_S^L A$ . Следовательно, цепь

$$\dots \rightarrow \Lambda^{p+1}W^* \otimes A \rightarrow \Lambda^p W^* \otimes A \rightarrow \Lambda^{p-1}W^* \otimes A \rightarrow \dots$$

является комплексом, и её когомологии равны градуированным векторным пространствам  $\text{Tor}_p^S(\mathbb{k}, A)$ .

Поскольку дифференциал  $d$  однороден и имеет степень 0, мы можем разложить комплекс Кошуля на сумму подкомплексов:

$$\dots \longrightarrow \Lambda^{p+1}W^* \otimes A_{q-1} \xrightarrow{d_{p+1,q-1}} \Lambda^pW^* \otimes A_q \xrightarrow{d_{p,q}} \Lambda^{p-1}W^* \otimes A_{q+1} \longrightarrow \dots$$

В итоге мы получаем  $R_{p,p+q} = (\mathrm{Tor}_p^S(A, \mathbb{k}))_{p+q} = \frac{\ker(d_{p,q})}{\mathrm{im}(d_{p+1,q-1})}$ .  $\square$

## 2.2. Проективные координатные алгебры

Пусть  $G$  — редуктивная алгебраическая группа. Обозначим через  $W = V_\lambda$  неприводимое представление группы  $G$  старшего веса  $\lambda$ . Пусть  $X$  —  $G$ -орбита точки  $w \in \mathbb{P}(W)$ , соответствующей вектору старшего веса в представлении  $W$ . В [22] доказано, что такое многообразие  $X$  является пересечением квадрик в  $\mathbb{P}(W)$ .

*Замечание 2.2.1.* Напомним, что  $X = G \cdot w \cong G/P$  является проективным многообразием, где  $P$  является параболической подгруппой. Обозначим через  $I$  множество простых корней, ортогональных к  $\lambda$ . Каждому набору  $I$  простых корней соответствует параболическая подгруппа  $P_I \subset G$ , содержащая некоторую фиксированную борелевскую подгруппу  $B$  группы  $G$ . Напомним, что однородные линейные расслоения на многообразии  $G/P_I$  соответствуют весам группы  $G$ , ортогональным ко всем корням множества  $I$ . В частности, расслоение  $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)|_X$  соответствует весу  $\lambda$ .

Следующее предложение с более подробным доказательством и другие результаты об орбитах старшего веса и более общих квазиоднородных пространствах можно найти в [23].

**Предложение 2.2.2.** *Во введённых обозначениях проективная координатная алгебра многообразия  $X$  равна*

$$A_X = \bigoplus_{n \geq 0} V_{n\lambda}^*.$$

*Доказательство.* По теореме Бореля–Ботта–Вейля (см. [24]) имеем

$$A_X = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(G/P, \mathcal{L}_{n\lambda}) = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(G/B, \mathcal{L}_{n\lambda}) = \bigoplus_{n \geq 0} V_{n\lambda}^*.$$

$\square$

**Следствие 2.2.3.** Во введённых обозначениях комплекс

$$\dots \rightarrow \Lambda^{p+1}W^* \otimes_{\mathbb{k}} V_{(q-1)\lambda}^* \rightarrow \Lambda^p W^* \otimes_{\mathbb{k}} V_{q\lambda}^* \rightarrow \Lambda^{p-1}W^* \otimes_{\mathbb{k}} V_{(q+1)\lambda}^* \rightarrow \dots$$

представлений группы  $G$  вычисляет пространства сизигий многообразия  $X = G \cdot w \subset \mathbb{P}(W)$ .

Обозначим через  $\Sigma_\lambda$  функтор Шура  $\text{Vect} \rightarrow \text{Vect}$ . Это полиномиальный функтор на категории векторных пространств, для которого относительно действия группы  $G = \text{GL}(V)$  представление  $\Sigma_\lambda V$  является единственным представлением группы  $G$  со старшим весом  $\lambda$ . Символ  $\Sigma_\lambda V'$  означает то же, что  $V_\lambda$ , если  $V' = V$  — тавтологическое представление группы  $\text{GL}(V)$ . Явное построение функтора Шура можно найти, например, в [16].

**Следствие 2.2.4.** Пусть  $W_i = \Sigma_{\lambda_i} V_i$ ,  $W_1 \otimes \dots \otimes W_m$  — неприводимый  $\text{GL}(V_1) \times \dots \times \text{GL}(V_m)$ -модуль,  $X \subset \mathbb{P}(W)$  — орбита вектора старшего веса  $\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_m$  в  $W = W_1 \otimes \dots \otimes W_m$ . Тогда проективная координатная алгебра многообразия  $X$  равна

$$A_X = \bigoplus_{n \geq 0} \Sigma_{n\lambda_1} V_1^* \otimes \dots \otimes \Sigma_{n\lambda_m} V_m^*$$

как  $\text{GL}(V_1) \times \dots \times \text{GL}(V_m)$ -модуль. В частности, комплекс Кошуля  $\Lambda^\bullet(W_1 \otimes \dots \otimes W_m) \otimes A_X$  вычисляет сизигии многообразия  $X$ .

## 2.3. Когомологии алгебр Ли

Пусть  $A$  — градуированная алгебра. Она называется *линейно порождённой*, если  $A_0 = \mathbb{k}$ , а естественное отображение  $\mathbf{T}^\bullet(A_1) \rightarrow A$  сюръективно. Линейно порождённая алгебра  $A$  называется *квадратичной*, если ядро  $J_A$  отображения  $\mathbf{T}^\bullet(A_1) \rightarrow A$  порождено как двусторонний идеал в  $\mathbf{T}^\bullet(A_1)$  подпространством  $I_A = J_A \cap (A_1 \otimes A_1) \subset A_1 \otimes A_1$ . Обозначим через  $(A_1, I_A)$  алгебру  $\mathbf{T}^\bullet(A_1)/(I_A)$ . Квадратично двойственная алгебра  $A^!$  определена парой  $(A_1^*, I_A^\perp)$ .

Квадратичная алгебра называется *кошулевой алгеброй*, если  $A \simeq \text{Ext}_{A^!}^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ . Хорошо известно, что проективная координатная алгебра орбиты старшего веса в неприводимом представлении редуктивной группы кошулева (см. [25]).

Алгебра  $A^!$  является универсальной обёртывающей для градуированной супералгебры Ли

$$L = \bigoplus_{m \geq 1} L_m = \mathcal{L}ie(A_1^*) / (I_A^\perp),$$

где  $\mathcal{L}ie(V)$  — свободная градуированная алгебра Ли, порождённая векторным пространством  $V$ .

**Предложение 2.3.1.** *Допустим, что проективная координатная алгебра  $A_X$  многообразия  $X$  кошулева. Тогда существует следующий изоморфизм алгебр*

$$R \simeq H^\bullet(L_{\geq 2}, \mathbb{k}), \quad R_{p,q} \simeq (H^{q-p}(L_{\geq 2}, \mathbb{k}))_q.$$

Здесь  $H^\bullet(L_{\geq 2}, \mathbb{k})$  означает когомологии алгебры Ли. Это предложение доказано в [8]. Таким образом вычислены сизигии плюккерова вложения грасманнианов  $\text{Gr}(2, n)$ .

**Пример 2.3.2.** Рассмотрим  $X = \text{Gr}(2, n) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ , где  $\dim V = n$ . Тогда из [8] имеем

$$R_{p,q} = \bigoplus_{\substack{\text{wt}(\lambda)=p \\ \lambda=(i_1, \dots, i_q | i_q+3, \dots, i_1+3)}} V_\lambda^*.$$

Здесь  $(a_1, \dots, a_k | b_k, \dots, b_1)$  обозначает диаграмму Юнга, составленную из вложенных крюков с парами длины и ширины  $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ , веса которых равны  $\text{wt}(\lambda) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) - k$ .

## 2.4. Резольвенты пучков

Обозначим через  $\text{coh}(X)$  категорию когерентных пучков на многообразии  $X$ , через  $\text{grmod}(S)$  — категорию конечно порождённых градуированных  $S$ -модулей. Пусть  $X \subset \mathbb{P}^N$  — проективное многообразие. Определим функтор  $F: \text{coh}(X) \rightarrow \text{grmod}(S)$  формулой

$$F(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{F}(n))(-n) = \text{Hom} \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}(-n), \right).$$

Ясно, что он может быть продолжен до производного функтора  $RF: D^b \text{coh}(X) \rightarrow D^b(\text{grmod}(S))$ .

**Лемма 2.4.1.** *Имеем*

$$R^i F(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^i(\mathbb{P}^N, \mathcal{F}(n))(-n) = \text{Ext}^i \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}(-n), \mathcal{F} \right).$$

*Доказательство.* По определению  $n$ -ой однородной компоненты функтора  $F$  имеем  $F_n(\mathcal{F}) = \text{Hom}(\mathcal{O}(-n), \mathcal{F})$ . Поэтому  $R^i F_n(\mathcal{F}) = \text{Ext}^i(\mathcal{O}(-n), \mathcal{F})$ , так что  $R^i F(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Ext}^i(\mathcal{O}(-n), \mathcal{F})$ .  $\square$

**Лемма 2.4.2.** *Если  $H^k(X, \mathcal{F}(n)) = 0$  для  $n \geq 0$  и  $k > 0$ , то  $H^k(X, \mathcal{F} \otimes \Omega^i(i+n)) = 0$  для  $n \geq 0$ ,  $k > 0$  и  $i > 0$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \Omega^i(i) \rightarrow \Lambda^i W^* \otimes \mathcal{O} \rightarrow \Lambda^{i-1} W^* \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}(i) \rightarrow 0.$$

Тензорно умножим на  $\mathcal{F}(n)$  и посмотрим на спектральную последовательность гиперкогомологий.  $\square$

**Предложение 2.4.3.** *Пусть  $\mathcal{F} \in D^b \text{coh}(X)$  — пучок на гладком проективном многообразии  $X \subset \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}^N$ , для которого для любых  $n > 0$  и  $k \geq 0$  верно  $H^n(X, \mathcal{F}(k)) = 0$ . Тогда для любых  $p$  и  $q$*

$$H^{q-p} \left( \mathbb{P}^N, \Omega_{\mathbb{P}(W^*)}^p(p) \otimes \mathcal{F} \right) \cong \left( \text{Tor}_p^S(F(\mathcal{F}), \mathbb{k}) \right)_q.$$

*Доказательство.* Пусть  $\Delta: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N$  — вложение диагонали. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^N & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & \mathbb{P}^N & \mathbb{P}^N \end{array}$$

и стандартную резольвенту диагонали

$$0 \rightarrow \Omega^N(N) \boxtimes \mathcal{O}(-N) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega(1) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \Delta_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N} \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

где через  $\mathcal{G} \boxtimes \mathcal{H}$  обозначается пучок  $p_1^* \mathcal{G} \otimes p_2^* \mathcal{H}$  для пучков  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{H}$  на  $\mathbb{P}^N$ . Пусть  $D_k$  — глупое обрезание (2.2):

$$D_k = \{ \Omega^{N-k}(N-k) \boxtimes \mathcal{O}(k-N) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega(1) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O} \}.$$

Тогда имеем цепь морфизмов комплексов

$$0 = D_{N+1} \longrightarrow D_N \longrightarrow \dots \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_0 = \Delta_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$$

с конусами  $\text{Cone}(D_{N-i+1} \rightarrow D_{N-i}) \cong \Omega^i(i) \boxtimes \mathcal{O}(-i)[i]$ .

Тензорно умножая на  $p_2^*\mathcal{F}$  и применяя  $Rp_{1*}$ , получаем цепь морфизмов комплексов

$$\begin{aligned} 0 = Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N+1}) &\rightarrow Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_N) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_1) \rightarrow Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_0) = \mathcal{F} \end{aligned}$$

с конусами

$$\text{Cone}(Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N-i+1}) \rightarrow Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N-i})) = \mathbf{H}^\bullet(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^i(i)) \otimes \mathcal{O}(-i)[i].$$

Применяя  $RF$  с учётом  $R^iF(\mathcal{F}) = 0$  для  $i > 0$ , то есть  $RF(\mathcal{F}) = F(\mathcal{F})$ , и  $RF(\mathcal{O}(-p)) = S(p)$ , получаем цепь морфизмов комплексов

$$\begin{aligned} 0 = RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N+1}) &\rightarrow RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_N) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_1) \rightarrow RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_0) = F(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

с конусами

$$\begin{aligned} \text{Cone}(RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N-i+1}) \rightarrow RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N-i})) &= \\ &= \mathbf{H}^\bullet(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^i(i)) \otimes S(i)[i]. \end{aligned}$$

Тензорно умножая на  $\mathbb{k}$ , получаем цепь морфизмов комплексов

$$\begin{aligned} 0 = RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N+1}) \otimes_S^L \mathbb{k} &\rightarrow RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_N) \otimes_S^L \mathbb{k} \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_1) \otimes_S^L \mathbb{k} \rightarrow RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_0) \otimes_S^L \mathbb{k} = F(\mathcal{F}) \otimes_S^L \mathbb{k} \end{aligned}$$

с конусами

$$\begin{aligned} \text{Cone} \left( RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N-i+1}) \otimes_S^L \mathbb{k} \rightarrow RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N-i}) \otimes_S^L \mathbb{k} \right) &= \\ &= \mathbf{H}^\bullet(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^i(i)) \otimes \mathbb{k}(i)[i]. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим спектральную последовательность фильтрованного комплекса, применённую к  $RF Rp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_0) \otimes_S^L \mathbb{k} = F(\mathcal{F}) \otimes_S^L \mathbb{k}$ . Её первый лист равен

$$E_1^{r,s} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{H}^s(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^{-r}(-r+n)) \otimes \mathbb{k}(r+n). \quad (2.3)$$

По лемме 2.4.2 имеем  $E_1^{r,s} = 0$  для  $s > 0$ . Значит, спектральная последовательность вырождается, и  $\text{Tor}_p(F(\mathcal{F}), \mathbb{k})$  имеет фильтрацию с факторами, равными  $E_1^{r,s}$ , где  $r + s = p$ . Значит,  $(\text{Tor}_p(F(\mathcal{F}), \mathbb{k}))_q = H^{q-p}(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^p(p))$ .  $\square$

Напомним, что сизигии пучков определены в 1.1.1.

**Следствие 2.4.4.** Пусть  $\mathcal{F}$  — пучок на  $\mathbb{P}^N$ , и выполнены предположения леммы 2.4.3. Тогда имеет место равенство  $R_{p,q}(\mathcal{F}) = H^{q-p}(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^p(p))$ .

*Доказательство.* Это утверждение является очевидным следствием леммы 2.4.3.  $\square$

Заметим, что в случае  $H^i(X, \mathcal{F}(k)) = 0$  для  $i > 0$  и  $k \geq 0$  спектральная последовательность вырождается, и мы получаем резольвенту пучка  $\mathcal{F}$ . Из предложения 2.4.3 следует, что сизигии проективного многообразия  $X$  совпадают с сизигиями его структурного пучка  $\mathcal{O}_X$ , если многообразие  $X$  гладкое и выполнено  $H^i(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$  для  $k \geq 0$  и  $i > 0$ .

Проиллюстрируем предложение 2.4.3 следующим известным примером. В работе [8] этот пример изучен при помощи квадратичных двойственных алгебр, в [26] — при помощи комплекса Кошуля полного пересечения.

**Пример 2.4.5.** Пусть  $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\text{Sym}^N V) = \mathbb{P}^N$  — вложение Веронезе. Легко проверить, что  $\Omega_{\mathbb{P}^N}(1)|_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}(-1)^{\oplus N}$ . Значит,

$$\Omega_{\mathbb{P}^N}^p(p)|_{\mathbb{P}^1} = \Lambda^p(\Omega_{\mathbb{P}^N}(1))|_{\mathbb{P}^1} = \Lambda^p(\Omega_{\mathbb{P}^N}(1)|_{\mathbb{P}^1}) \simeq \Lambda^p \mathcal{O}(-1)^{\oplus N} \simeq \mathcal{O}(-p)^{\oplus \binom{N}{p}}.$$

По предложению 2.4.3 для  $p > 0$  имеем

$$\dim R_{p,p+1} = \dim H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^N}^p(p)) = \binom{N}{p} \dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-p)) = (p-1) \binom{N}{p}$$

и  $\dim R_{0,0} = 1$ . Все прочие  $R_{p,q}$  равны нулю.

Рассмотрим вложение Сегре  $X = \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$  и положим  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(a, b)$ . Тогда  $H^i(X, \mathcal{F}(k)) = 0$  для всех  $i > 0$  и  $k \geq 0$ , если  $a \geq -m$  и  $b \geq -n$ . В этом случае сизигии пучка  $\mathcal{O}(a, b)$  могут быть вычислены как когомологии комплекса

$$K^\bullet = \Lambda^\bullet(U^* \otimes V^*) \otimes \bigoplus_{k \geq 0} \text{Sym}^{a+k} U^* \otimes \text{Sym}^{b+k} V^*. \quad (2.4)$$

Значит, мы имеем

$$R_{p,q}(\mathcal{O}(a, b)) = (H^p(K^\bullet))_q.$$

Рассмотрим квадратичное вложение Веронезе  $X = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\text{Sym}^2 V)$  и положим  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(a)$ . Тогда  $H^i(X, \mathcal{F}(k)) = 0$  для всех  $i > 0$  и  $k \geq 0$ , если  $a \geq -n$ . В этом случае сизигии пучка  $\mathcal{O}(a)$  могут быть вычислены как когомологии комплекса

$$K^\bullet = \Lambda^\bullet \text{Sym}^2 V^* \otimes \bigoplus_{k \geq 0} \text{Sym}^{2k} V^*, \quad (2.5)$$

откуда

$$R_{p,q}(\mathcal{O}(a)) = (H^p(K^\bullet))_q.$$

## Обозначения и комбинаторика

### 3.1. Комбинаторные кубы

Пусть  $\mathcal{A}$  —  $\mathbb{k}$ -линейная абелева категория. Объект  $M \in \mathcal{A}$  называется *простым*, если  $\text{Hom}(M, M) = \mathbb{k}$ . Например, любое неприводимое представление редуктивной группы  $G$  является простым объектом в категории  $\text{Rep}(G)$  представлений группы  $G$ . Результаты этого параграфа будут далее применяться в случае  $\mathcal{A} = \text{Rep}(G)$ , где  $G$  — редуктивная группа.

**Определение 3.1.1.** Комплекс  $K^\bullet \in \text{Kom}(\mathcal{A})$  назовём *комбинаторным  $n$ -кубом* ( $k$ -ым обрезанным комбинаторным  $n$ -кубом), если он изоморфен комплексу  $M \otimes \Lambda^\bullet E$  (соответственно,  $M \otimes \Lambda^{\geq k} E$ ) для некоторого простого объекта  $M$  в категории  $\mathcal{A}$ ,  $E$  — векторное пространство, и дифференциал в  $K^\bullet$  индуцирован дифференциалом  $d(\xi) = \xi \wedge \xi_0$  на  $\Lambda^\bullet E$  для некоторого ненулевого вектора  $\xi_0 \in E$ .

Выбрав базис в  $E$ , можно отождествить  $K^\bullet$  с тотальным комплексом тензорного произведения  $\bigotimes_{i=1}^n \{M \xrightarrow{\xi_{0,i}} M\}$ . В частности, если  $\xi_0 \neq 0$ , то хотя бы одно отображение  $\xi_{0,i}$  является изоморфизмом, так что  $H^i(K^\bullet) = 0$ .

Очевидно, если  $K^\bullet$  — комбинаторный  $n$ -куб, то  $K^{\geq k}$  —  $k$ -ый обрезанный комбинаторный  $n$ -куб.

**Лемма 3.1.2.** Если  $K^\bullet$  — комбинаторный  $n$ -куб с  $n > 0$ , то  $H^i(K^\bullet) = 0$  для любого  $i$ . Если  $n = 0$ , то  $H^0(K^\bullet) = M$  и  $H^i(K^\bullet) = 0$  для  $i > 0$ . Если  $K^\bullet$  —  $k$ -ый обрезанный комбинаторный  $n$ -куб, то  $H^k(K^\bullet) = M^{\oplus \binom{n-1}{k}}$  и  $H^i(K^\bullet) = 0$  для  $i \neq k$  и  $0 < k \leq n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим комбинаторный  $n$ -куб  $L^\bullet$  с теми же базовым объектом  $M$ , векторным пространством  $E$  и вектором  $\xi_0 \in E$ . Тогда  $K^\bullet = L^{\geq k}$ . Мы можем разложить в прямую сумму пространство  $E = E' \oplus \langle \xi_0 \rangle$ . Тогда для любого  $k$  имеем  $\Lambda^k E = \Lambda^k E' \oplus \Lambda^{k-1} E' \wedge \xi_0$ . Значит, ранг отображения  $d: \Lambda^k E \rightarrow \Lambda^{k+1} E$  равен  $\dim \Lambda^k E' = \binom{n-1}{k}$ . Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.  $\square$

*Замечание 3.1.3.* Если  $K$  и  $K'$  являются  $k$ -ыми обрезанными комбинаторными  $n$ -кубами относительно одного простого объекта  $M$ , то они изоморфны. Значит, если  $K$  и  $K'$  —  $k$ -ый и  $k'$ -ый обрезанные комбинаторные  $n$ -кубы с общим базовым объектом  $M$ , и  $k' < k$ , то  $K \simeq (K')^{\geq k}$ . Любой морфизм  $K \rightarrow K'$  является изоморфизмом на  $(K')^{\geq k}$ , если  $k' \leq k$ .

**Лемма 3.1.4.** Пусть  $(K^\bullet, d)$  — комплекс над абелевой категорией  $\mathcal{A}$ ,  $E = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$  — векторное пространство. Допустим, выполнено равенство градуированных объектов  $K^i = M \otimes \Lambda^i E$ , где  $M$  — простой объект в  $\mathcal{A}$ . Как оператор на  $M \otimes \Lambda^{\geq k} E$ , дифференциал  $d$  определён своими матричными элементами  $d_I^J \in \mathbb{k}$ , для которых

$$d \left( m \otimes \bigwedge_{i \in I} \xi_i \right) = \sum_{|J|=|I|+1} \left( d_I^J \cdot m \otimes \bigwedge_{j \in J} \xi_j \right). \quad (3.1)$$

Предположим,  $d_I^J \neq 0$ , если и только если  $I \subset J$  и  $|I| + 1 = |J|$ . Тогда  $K^\bullet$  —  $k$ -ый обрезанный комбинаторный  $n$ -куб.

*Доказательство.* Докажем утверждение индукцией по  $n$ . Случай  $n = 1$  тривиален. Пусть  $n > 1$ , тогда  $E = E' \oplus \mathbb{k}$ , где  $E' = \langle \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \rangle$  и  $\mathbb{k} = \langle \xi_n \rangle$ . Комплекс  $K^\bullet = K_1^\bullet \oplus K_2^\bullet$ , где  $K_1^\bullet = M \otimes \Lambda^{\geq k} E'$  и  $K_2^\bullet = M \otimes \Lambda^{\geq k-1} E' \wedge \xi_n$ . По предложению индукции  $K_1^\bullet \simeq M \otimes \Lambda^{\geq k} E'$  с дифференциалом  $d_1 = \xi \wedge -$  для  $\xi \in E'$  и  $K_2^\bullet \simeq M \otimes \xi_n \wedge \Lambda^{\geq k-1} E'$  с дифференциалом  $d_2 = \xi' \wedge -$  для  $\xi' \in E'$ . По замечанию 3.1.3 можно считать, что  $\xi = \xi'$ . Обозначим  $d' = \xi \wedge -$  на  $K^\bullet$ .

Тогда дифференциал  $d$  на  $K^\bullet$  задаётся формулой  $d(-) = d'(-) + \varphi(-)$  для некоторого однородного гомоморфизма  $\varphi: M \otimes \Lambda^{\geq k} E' \rightarrow M \otimes \xi_n \wedge \Lambda^{\geq k-1} E'$  степени 1. Из (3.1) имеем  $\varphi(m) = cm \otimes \xi_n$  для некоторого  $c \neq 0$ . Поэтому по замечанию 3.1.3 получаем  $\varphi = c\xi_n \wedge -$ . Мы видим, что комплекс  $K^\bullet$  изоморфен  $M \otimes \Lambda^{\geq k} E$  с дифференциалом  $d = \xi'' \wedge -$ , где  $\xi'' = \xi + \xi_n$ .  $\square$

## 3.2. Представления

Пусть  $G$  — редуктивная группа,  $\pi$  — её доминантный вес. Через  $V_\lambda$  будем обозначать неприводимое представление старшего веса  $\lambda$ . Рассмотрим условия на вес  $\pi$ .

**Свойство 3.2.1.** Для каждого  $k$  представление  $\Lambda^k V_\pi$  группы  $G$  не имеет кратных подпредставлений.

**Свойство 3.2.2.** Для любого доминантного веса  $\mu$  и любого  $n$  в представлении  $V_\mu \otimes V_{n\pi}$  нет кратных подпредставлений.

Скажем, что неприводимое представление обладает свойством 3.2.1 или 3.2.2, если этим свойством обладает его старший вес.

Пусть  $X_\pi$  — проективизация орбиты вектора старшего веса в представлении  $V_\pi$ . Из предложения 2.2.2 проективная координатная алгебра многообразия  $X_\pi$  равна  $A_\pi = \bigoplus_{n \geq 0} V_{n\pi}^*$ . По следствию 2.2.3 сизигии многообразия  $X_\pi$  вычисляются комплексом Кошуля

$$K^\bullet = A_\pi \otimes \Lambda^\bullet V_\pi^*.$$

Пусть  $\mathfrak{X}$  — решётка весов группы  $G$ ,  $\omega$  — доминантный вес группы  $G$ . Через  $K_\omega^\bullet$  обозначим изотипическую компоненту комплекса Кошуля  $K^\bullet$ , соответствующую весу  $\omega$ .

**Предложение 3.2.3.** Допустим, вес  $\pi$  группы  $G$  удовлетворяет свойствам 3.2.1 и 3.2.2. Тогда существует изоморфизм представлений группы  $G$

$$K_\omega^\bullet \simeq V_\omega \otimes \bigoplus_{\substack{(\lambda, n) \in \mathfrak{X} \oplus \mathbb{Z} \\ \omega \subseteq \lambda \otimes n\pi}} \mathbb{k},$$

где дифференциал  $d$  на  $\bigoplus_{\substack{(\lambda, n) \in \mathfrak{X} \oplus \mathbb{Z} \\ \omega \subseteq \lambda \otimes n\pi}} \mathbb{k}$  обладает тем свойством, что  $d_{\lambda_1, n_1}^{\lambda_2, n_2} \neq 0$ , если и только если  $n_1 + 1 = n_2$  и  $\lambda_1 \subseteq \lambda_2 \otimes \pi$ .

*Доказательство.* Из условий 3.2.1 и 3.2.2  $G$ -подмодуль  $V_\omega$  имеет кратность 1 в представлении  $V_\lambda \otimes V_{n\pi}$ , если  $\omega \subseteq \lambda \otimes n\pi$  и имеет кратность 0 иначе. Отсюда следует равенство  $K_\omega^\bullet \simeq V_\omega \otimes \bigoplus_{\substack{(\lambda, n) \in \mathfrak{X} \oplus \mathbb{Z} \\ \omega \subseteq \lambda \otimes n\pi}} \mathbb{k}$  как градуированных объектов.

Рассмотрим дифференциал  $d$ , заданный композицией (2.1), и пару элементов  $(\lambda_1, n_1)$  и  $(\lambda_2, n_2) \in \mathfrak{X} \oplus \mathbb{Z}$ . Очевидно, что если  $n_1 + 1 \neq n_2$ , то  $d_{\lambda_1, n_1}^{\lambda_2, n_2} = 0$ . Пусть  $n_1 + 1 = n_2$ . Из эквивариантности  $d$  очевидно, что если  $\lambda_2 \not\subseteq \lambda_1 \otimes \pi$ , то  $d_{\lambda_1, n_1}^{\lambda_2, n_2} = 0$ . Допустим,  $\lambda_2 \subseteq \lambda_1 \otimes \pi$ . Рассмотрим ограничение диаграммы (2.1) на изотипическую компоненту веса  $\omega$  и рассмотрим отображение

между подмодулями, соответствующими парам  $(\lambda_1, n_1)$  и  $(\lambda_2, n_2)$ :

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda^p V_\pi \otimes V_{n\pi} & \longrightarrow & \Lambda^{p-1} V_\pi \otimes V_\pi \otimes V_{n\pi} & \longrightarrow & \Lambda^{p-1} V_\pi \otimes V_{(n+1)\pi} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
V_{\lambda_1} \otimes V_{n\pi} & & V_{\lambda_2} \otimes V_\pi \otimes V_{n\pi} & \longrightarrow & V_{\lambda_2} \otimes V_{(n+1)\pi} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
V_\omega & \xrightarrow{i} & V_\omega \otimes \bigoplus_{\substack{\nu: \lambda_1 \subseteq \nu \otimes \pi \\ \omega \subseteq \nu \otimes n\pi}} \mathbb{k} & \xrightarrow{m} & V_\omega
\end{array}$$

Образ отображения  $i$  лежит в слагаемом, соответствующем  $\nu = \lambda_2$ . Очевидно, в естественном базисе все координаты отображения  $m$  ненулевые, так что в итоге имеем  $d_{\lambda_1, n_1}^{\lambda_2, n_2} = m \circ i \neq 0$ .  $\square$

Это утверждение позволяет комбинаторно описывать изотипические компоненты комплекса Кошуля, если выполнены свойства 3.2.1 и 3.2.2.

**Определение 3.2.4.** Пусть для веса  $\pi$  группы  $G$  выполнены свойства 3.2.1 и 3.2.2. Пусть  $K^\bullet$  — комплекс Кошуля  $A_\pi \otimes \Lambda^\bullet V_\lambda$ ,  $\omega$  — вес группы  $G$ . Через  $\mathfrak{P}_\omega(K^\bullet)$  обозначим множество таких точек  $(\lambda, n)$  в решётке  $\mathfrak{X} \oplus \mathbb{Z}$ , что  $\omega \subseteq \lambda \otimes n\pi$ .

Таким образом, имеем

$$K_\omega^\bullet = V_\omega \otimes \bigoplus_{\mathfrak{P}_\omega(K^\bullet)} \mathbb{k},$$

и дифференциал  $d$  на  $K_\omega^\bullet$  индуцирован дифференциалом  $d$  на векторном пространстве  $\bigoplus_\omega(K^\bullet)$ , для которого по лемме 3.2.3 для любых  $\mathfrak{p}_1 = (\lambda_1, n_1)$  и  $\mathfrak{p}_2 = (\lambda_2, n_2) \in \mathfrak{P}_\omega(K^\bullet)$  выполнено  $d_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} \neq 0$ , если и только если  $\lambda_2 \subseteq \lambda_1 \otimes \pi$  и  $n_1 + 1 = n_2$ . Таким образом, множество  $\mathfrak{P}_\omega(K^\bullet)$  имеет структуру графа: скажем, что существует ребро из вершины  $a$  в вершину  $b$ , если  $d_a^b \neq 0$ .

Для некоторых возникающих дальше комплексов (а именно, изотипические компоненты веса  $\omega$  комплекса Кошуля  $K^\bullet$ ) в подрешётке решётки  $\mathfrak{X} \oplus \mathbb{Z}$  при подходящем выборе координат  $x_1, \dots, x_k$  множество точек  $\mathfrak{P}_\omega(K^\bullet)$  будет совпадать с множеством вершин стандартного единичного куба, лежащим в полупространстве  $\sum_{i=1}^k x_i \geq l$  для некоторого  $l$ , что соответствует обрезанию комплекса. Это объясняет выбор термина «обрезанный комбинаторный куб».

### 3.3. Диаграммы

Пусть  $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$  — вложение Серге,  $\dim U = m$ ,  $\dim V = n$ ,  $U \otimes V = W$ . Обозначим

$$S_U = \bigoplus_{i \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(i)) = \text{Sym}^\bullet(U^*),$$

$$S_V = \bigoplus_{i \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(i)) = \text{Sym}^\bullet(V^*),$$

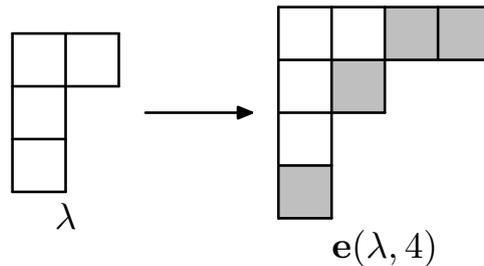
$$A = \bigoplus_{i \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U \otimes V)}(i)) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Sym}^i(U^*) \otimes \text{Sym}^i(V^*).$$

Существуют следующие групповые действия:  $\text{GL}(U) = G_U : S_U$ ,  $\text{GL}(V) = G_V : S_V$ ,  $G_U \times G_V = G : A$ .

Фиксируем некоторые обозначения. Рисовать диаграммы Юнга будем вниз и направо от  $(0, 0)$ . Напомним, что длину диагонали  $l(\lambda)$  и вес  $\text{wt}(\lambda)$  для диаграммы  $\lambda$  мы определили в 1.2.1. Символом  $\lambda'$  мы обозначаем транспонированную диаграмму  $\lambda$ .

**Определение 3.3.1.** Пусть  $\lambda$  — диаграмма Юнга. Обозначим через  $\mathbf{e}(\lambda, n)$  диаграмму, полученную из  $\lambda$  добавлением клетки в конец каждого из первых  $n$  столбцов.

Следующая иллюстрация содержит пример.



Обратим внимание, что если первый столбец  $\lambda$  имеет по крайней мере  $\dim V$  клеток, то соответствующее представление  $V_{\mathbf{e}(\lambda, n)} = 0$ . Иначе  $\mathbf{e}(\lambda, n)$  соответствует представлению минимального веса в разложении  $V_\lambda \otimes \text{Sym}^n(V)$  по формуле Пиери (см. [16]).

Неприводимые представления группы  $G = \text{GL}(U) \times \text{GL}(V)$  соответствуют парам диаграмм Юнга  $(\lambda, \mu)$ . Мы будем пересекать и вычитать диаграммы Юнга как множества клеток.

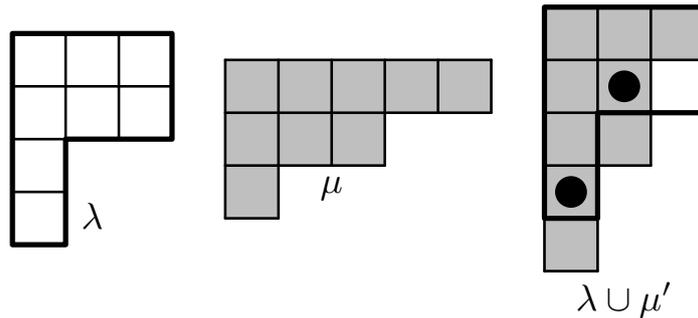
Пусть  $(\lambda, \mu)$  — пара диаграмм Юнга.

**Определение 3.3.2.** Обозначим через  $B(\lambda, \mu)$  множество таких клеток  $c$  диаграммы  $\lambda \cap \mu'$ , что

- снизу от  $c$  нет клеток  $\lambda$ , и
- справа от  $c$  нет клеток  $\mu'$ .

Для пары диаграмм  $\omega = (\lambda, \mu)$  для краткости будем писать  $B(\omega) = B(\lambda, \mu)$ .

На следующей картинке  $B(\lambda, \mu)$  обозначено точками.



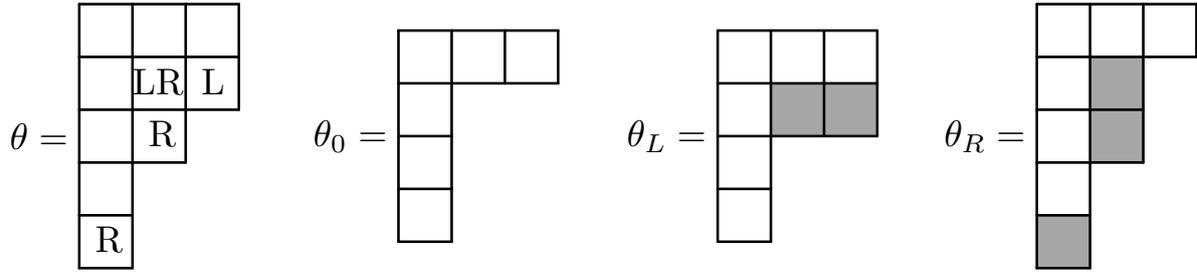
**Определение 3.3.3.** Обозначим через  $Y(w, l, r)$  множество диаграмм Юнга  $\theta$  с некоторыми клетками, отмеченными 'L', 'R' или обеими буквами, где

- в каждом столбце не более одной 'L', в каждой строке не более одной 'R';
- общее количество 'L' равно  $l$ , общее количество 'R' равно  $r$ ;
- неотмеченных клеток ровно  $w$ ;
- $\theta_0, \theta_0 \cup \theta_L$  и  $\theta_0 \cup \theta_R$  являются диаграммами Юнга, где  $\theta_0, \theta_L$  и  $\theta_R$  означают объединения неотмеченных клеток  $\theta$ , клеток, содержащих 'L', и клеток, содержащих 'R'.

Обозначим через  $Y_{m,n}(w, l, r)$  подмножество таких диаграмм  $\theta \in Y(w, l, r)$ , что высота  $\theta_0 \cup \theta_L$  не превосходит  $m$ , а ширина  $\theta_0 \cup \theta_R$  не превосходит  $n$ . Можно сказать, что отмеченная диаграмма  $\theta$  — это тройка  $(\theta_0, \theta_L, \theta_R) \in Y_{m,n}(w, l, r)$ , состоящая из диаграммы Юнга  $\theta_0$  и двух косых диаграмм Юнга  $\theta_L$  и  $\theta_R$ . Обозначим

$$\lambda(\theta) = \theta_0 \cup \theta_L, \mu(\theta) = (\theta_0 \cup \theta_R)', \text{ и } \omega(\theta) = (\lambda(\theta), \mu(\theta)).$$

Следующая картинка содержит пример элемента множества  $Y_{4,4}(6, 2, 3)$ .



Закрашенные клетки соответствуют отмеченным клеткам в  $\theta$ .

Для  $\theta \in Y_{m,n}(w, a, b)$  обозначим

$$\Sigma_{\theta}W^* = \Sigma_{\lambda(\theta)}U^* \otimes \Sigma_{\mu(\theta)}V^* \quad (3.2)$$

для краткости.

**Предложение 3.3.4.** *Существует изоморфизм*

$$\Lambda^w(U^* \otimes V^*) \otimes \text{Sym}^l(U^*) \otimes \text{Sym}^r(V^*) = \bigoplus_{\theta \in Y_{m,n}(w,l,r)} \Sigma_{\omega(\theta)}W^*,$$

где  $m = \dim U$  и  $n = \dim V$ .

*Замечание 3.3.5.* Важно, что в этом разложении каждое слагаемое имеет кратность 1.

*Доказательство.* По хорошо известной формуле имеем  $\Lambda^w(U^* \otimes V^*) = \bigoplus_{\text{wt}(\nu)=w} \Sigma_{\nu}U^* \otimes \Sigma_{\nu'}V^*$  (см. [16]). По формуле Пиери имеем  $\Sigma_{\nu}U^* \otimes \Sigma_{\nu'}V^* \otimes \text{Sym}^l U^* \otimes \text{Sym}^r V^* = \bigoplus_{(\lambda,\mu)} \Sigma_{\lambda}U^* \otimes \Sigma_{\mu}V^*$ , где сумма берётся по всем парам диаграмм Юнга  $(\lambda, \mu)$ , для которых

- $\nu \subset \mu'$ ,  $\nu \subset \lambda$ ,  $|\lambda - \nu| = l$ ,  $|\mu' - \nu| = r$ ;
- в косой диаграмме  $\lambda - \nu$  в каждом столбце не более одной клетки, в косой диаграмме  $\mu' - \nu$  в каждой строке не более одной клетки.

По такой паре  $(\lambda, \mu)$  построим диаграмму Юнга  $\theta = \lambda \cup \mu'$ , где отметим каждую клетку  $\lambda - \nu$  буквой 'L' а каждую клетку  $\mu' - \nu$  буквой 'R' (обратим внимание, что некоторые клетки окажутся отмеченными обеими буквами). Тогда  $\theta \in Y_{m,n}(w, l, r)$ . С другой стороны, если  $\theta \in Y_{m,n}(w, l, r)$ , то  $\nu = \theta_0$ ,  $\lambda = \lambda(\theta)$  и  $\mu = \mu(\theta)$ . Ясно, что свойства, перечисленные выше, выполнены.  $\square$

Пусть  $X = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\text{Sym}^2 V)$  — квадратичное вложение Веронезе,  $\dim V = n$ .

**Определение 3.3.6.** Пусть  $\lambda$  — диаграмма Юнга. Будем обозначать  $\lambda = (a_1, \dots, a_k | b_k, \dots, b_1)$ , если диаграмма  $\lambda$  состоит из вложенных крюков, пары ширины и высоты которых равны соответственно  $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ . Назовём эти крюки в диаграмме  $\lambda$  *главными*.

Допустим,  $\lambda = (a_1, \dots, a_k | b_k, \dots, b_1)$ .

**Определение 3.3.7.** Через  $C(\lambda)$  обозначим множество таких  $1 \leq l \leq k$ , что

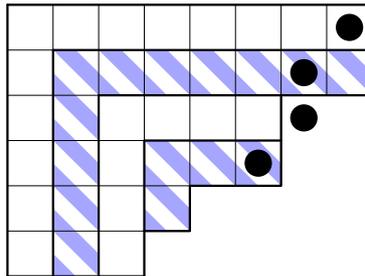
- $a_l > b_l$ , то есть  $l$ -ый крюк имеет ширину больше его же длины;
- $a_{l+1} \leq b_{l+1} + 1$  или  $l = k$ , то есть следующий крюк имеет ширину разве что на один больше, чем высоту, или  $l$ -ый крюк последний, то есть  $l = k$ .

Нас будет интересовать значение  $C$  на диаграммах  $\lambda$ , у которых каждый главный крюк не менее широкий, чем высокий. Поэтому условия на  $l \in C$  можно переформулировать:

- диаграмма  $\lambda$  содержит клетку  $(l + b_l, l - 1)$ ,
- диаграмма  $\lambda$  не содержит клетку  $(l + b_l, l)$ .

Следующая картинка содержит пример диаграммы

$$\lambda = (8, 8, 6, 6, 4, 3) = (8, 7, 4, 3 | 1, 3, 4, 5).$$

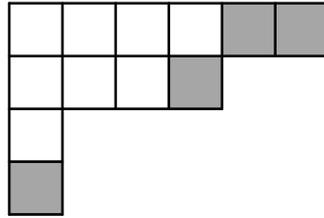


Здесь  $C(\lambda) = \{2, 4\}$ , и соответствующие крюки заштрихованы. Относительно другой формулировки для каждого  $l \in \{1, 2, 3, 4\}$  клетка  $(l + b_l, l - 1)$  выделена жирной точкой. Элемент  $l$  принадлежит  $C(\lambda)$ , если соответствующая клетка лежит в диаграмме, а клетка ниже её — нет.

**Определение 3.3.8.** Через  $Z(w, a)$  обозначим множество диаграмм Юнга  $\theta$  с некоторыми закрашенными клетками, где

- не закрашено  $2w$  клеток, образующих диаграмму Юнга  $\theta_0$ , у которой в каждом главном крюке клеток в строке на одну больше, чем в столбце;
- закрашено  $a$  клеток,
- нет двух окрашенных клеток в одном столбце.

Следующая картинка содержит пример элемента  $\theta \in Z(4, 4)$ .



Через  $Z_n(w, a)$  обозначим подмножество элементов из  $Z(w, a)$ , имеющих не более  $n$  столбцов.

**Предложение 3.3.9.** *Существует изоморфизм*

$$\Lambda^w \text{Sym}^2 V^* \otimes \text{Sym}^a V^* = \bigoplus_{\theta \in Z_n(w, a)} \Sigma_{\theta} V^*,$$

где  $n = \dim V$ .

*Доказательство.* По хорошо известной формуле (см. [27]) имеем

$$\Lambda^w \text{Sym}^2 V^* = \bigoplus_{\substack{\lambda = (a_1, \dots, a_n | a_{n-1}, \dots, a_1 - 1) \\ a_1 > a_2 > \dots > a_n \\ a_1 + \dots + a_n = w}} \Sigma_{\lambda} V^*.$$

Остаётся применить формулу Пиери (см. [16]) тензорно умножая на  $\text{Sym}^a V^*$  и закрашивая добавленные клетки.  $\square$

## Изотипические компоненты комплекса Кошуля

### 4.1. Вложение Сегре

Для любого представления  $E$  группы  $G = \mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(V)$  и любой пары  $\omega = (\lambda, \mu)$  диаграмм Юнга обозначим через  $\mathrm{pr}_\omega(E)$  проекцию на изотипическую компоненту, соответствующую весу  $\omega$ . Пусть  $K^\bullet$  — комплекс Кошуля

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \Lambda^{p+1}(U^* \otimes V^*) \otimes \mathrm{Sym}^{a+q-1}(U^*) \otimes \mathrm{Sym}^{b+q-1}(V^*) \rightarrow \\ \rightarrow \Lambda^p(U^* \otimes V^*) \otimes \mathrm{Sym}^{a+q}(U^*) \otimes \mathrm{Sym}^{b+q}(V^*) \rightarrow \\ \rightarrow \Lambda^{p-1}(U^* \otimes V^*) \otimes \mathrm{Sym}^{a+q+1}(U^*) \otimes \mathrm{Sym}^{b+q+1}(V^*) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

определённый в (2.4). Множество  $B$  определено в 3.3.2.

**Предложение 4.1.1.** Пусть  $\omega = (\lambda, \mu)$  — вес группы  $\mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(V)$ . Тогда  $\mathrm{pr}_\omega(K^\bullet) = 0$ , если не  $\omega = \omega(\theta)$  для некоторой отмеченной диаграммы  $\theta \in Y_{m,n}(w, l, r)$ , для которой  $a - b = l - r$ , где  $m = \dim U$  и  $n = \dim V$ . Более того, в этом случае, если  $\theta_L \cap \theta_R = \emptyset$ , то

$$\mathrm{pr}_\omega(K^\bullet) \simeq \Sigma_\lambda U^* \otimes \Sigma_\mu V^* \otimes \Lambda^{\geq k} \mathbb{K}^n(-k),$$

является  $k$ -ым обрезанным комбинаторным  $n$ -кубом, где  $n = |B(\lambda, \mu)|$  и

$$k = a - l = b - r.$$

*Доказательство.* Проверим условия, необходимые для  $\mathrm{pr}_\omega(K^\bullet) \neq 0$ . По лемме 3.3.4 существует биекция между неприводимыми  $G$ -модулями в  $\Lambda^w W^* \otimes \mathrm{Sym}^l U^* \otimes \mathrm{Sym}^r V^*$  и множеством  $Y_{m,n}(w, l, r)$ . Следовательно, комплекс  $K^\bullet$  изоморфен

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \bigoplus_{\theta \in Y_{m,n}(p+1, a+q-1, b+q-1)} \Sigma_\theta W^* \rightarrow \bigoplus_{\theta \in Y_{m,n}(p, a+q, b+q)} \Sigma_\theta W^* \rightarrow \\ \rightarrow \bigoplus_{\theta \in Y_{m,n}(p-1, a+q+1, b+q+1)} \Sigma_\theta W^* \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Обратим внимание, что  $|\theta_L| - |\theta_R| = (a + q + k) - (b + q + k) = a - b$ , откуда следует условие  $a - b = l - r$ .

Ясно, что  $\text{pr}_\omega(K^\bullet)$  является подкомплексом в (4.1), состоящим из модулей  $\Sigma_\theta W^*$  с  $\omega(\theta) = \omega$ . Остаётся проверить, что этот подкомплекс является обрезанным комбинаторным кубом. Существует градуированное векторное пространство  $\mathcal{V}^\bullet$ , для которого  $\text{pr}_\omega(K^\bullet) \simeq \Sigma_\omega W^* \otimes \mathcal{V}^\bullet$ . Поскольку представление  $\Sigma_\omega W^*$  группы  $G$  неприводимо, по лемме Шура (см. [24]) верно  $\text{End}(\Sigma_\omega W^*) = \mathbb{k}$ . Значит,

$$d \in \text{End}_G(\Sigma_\omega W^* \otimes \mathcal{V}^\bullet) = \text{End}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Теперь докажем, что комплекс  $\text{pr}_\omega(K^\bullet)$  является обрезанным комбинаторным кубом. Докажем это в два шага. Во-первых, выберем базис в  $\mathcal{V}^\bullet$ . Во-вторых, найдём все ненулевые матричные элементы  $d$  в этом базисе. Тогда останется только воспользоваться леммой 3.1.4.

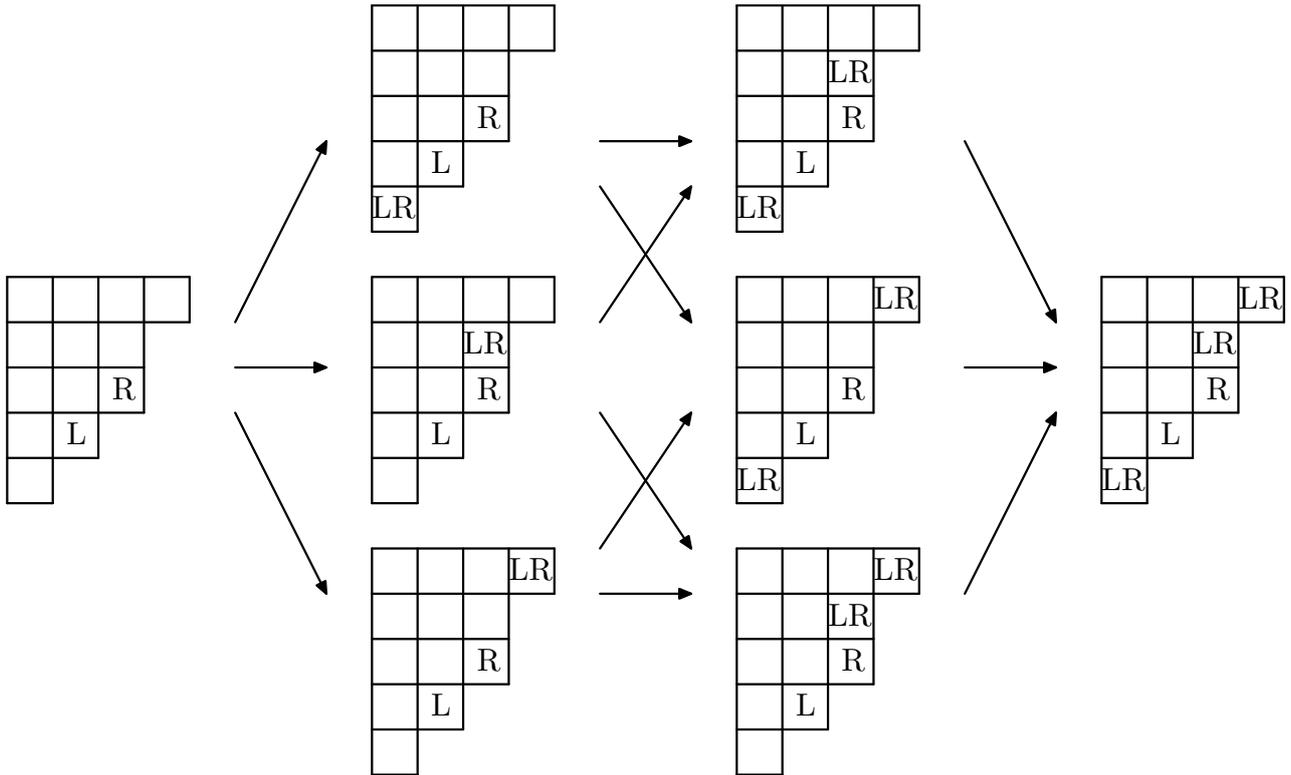
Возьмём произвольный вес  $\omega = (\lambda, \mu)$ . Допустим,  $\omega = \omega(\theta)$ . Тогда  $\theta = \lambda \cup \mu'$ . Более того, все клетки косой диаграммы  $\lambda - \mu'$  отмечены ‘L’, все клетки косой диаграммы  $\mu' - \lambda$  отмечены ‘R’, и некоторые из клеток  $\lambda \cap \mu'$  могут быть отмечены ‘LR’. Ясно, что можно отметить ‘LR’ только клетки множества  $B(\lambda, \mu)$ , определённого в 3.3.2. Следовательно, отмеченные диаграммы  $\theta$  со свойством  $\omega(\theta) = \omega$  находятся в соответствии с подмножествами  $B(\lambda, \mu)$ , то есть со стандартным базисом внешней алгебры  $\Lambda^\bullet E$  векторного пространства  $E$ , натянутого на векторы  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , пронумерованные элементами  $B(\lambda, \mu)$ . Вектор  $\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}$  с  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq k$  соответствует  $\theta$  с клетками  $i_1, \dots, i_k \in B(\lambda, \mu)$ , отмеченными ‘LR’.

Возьмём  $\theta \in Y_{m,n}(p, a+q, b+q)$ , для которой  $\omega(\theta) = \omega$ . По лемме 3.3.4 эта диаграмма соответствует  $G$ -модулю в  $\Lambda^p W^* \otimes \text{Sym}^{a+q} U^* \otimes \text{Sym}^{b+q} V^*$ , где  $\text{wt}(\theta_0) = p$ . Ограничение отображения  $\Lambda^p W^* \rightarrow \Lambda^{p-1} W^* \otimes W^*$  на слагаемое  $\Sigma_{\theta_0} U^* \otimes \Sigma_{\theta'_0} V^*$  раскладывается как сумма  $\Sigma_{\theta_0} U^* \rightarrow \Sigma_\nu U^* \otimes U^*$  и  $\Sigma_{\theta'_0} V^* \rightarrow \Sigma_{\nu'} V^* \otimes V^*$  для всех поддиаграмм  $\nu \subset \theta_0$ , полученных удалением одной клетки  $\theta_0$ .

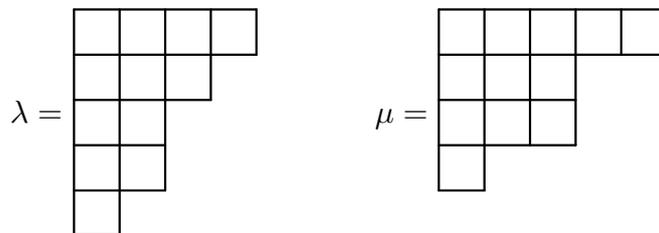
Отображение  $W^* \otimes \text{Sym}^{a+q} U^* \otimes \text{Sym}^{b+q} V^* \rightarrow \text{Sym}^{a+q+1} U^* \otimes \text{Sym}^{b+q+1} V^*$ , ограниченное на слагаемое, соответствующее  $\nu$ , является тензорным произведением канонических отображений  $U^* \otimes \text{Sym}^{a+q} U^* \rightarrow \text{Sym}^{a+q+1} U^*$  и  $V^* \otimes \text{Sym}^{b+q} V^* \rightarrow \text{Sym}^{b+q+1} V^*$ . Наконец, заметим, что композиция дифференциала, ограниченного на  $\Sigma_\theta W^*$ , с проекцией на  $\Sigma_\theta W^*$  не равна нулю тогда и только тогда, когда  $\vartheta$  получается из  $\theta$ , если отметить ‘LR’ ещё одну клетку.

По лемме 3.1.4 комплекс  $\text{pr}_\omega(K^\bullet)$  является  $k$ -ым обрезанным комбинаторным  $n$ -кубом. Остаётся заметить, что компонента старшей степени комплекса имеет  $l + |B(\lambda, \mu)|$  клеток, содержащих ‘L’, и  $r + |B(\lambda, \mu)|$  клеток, содержащих ‘R’. Следовательно, эта компонента имеет степень  $l + |B(\lambda, \mu)| - a = r + |B(\lambda, \mu)| - b = n - k$ . Поэтому мы имеем  $\text{pr}_\omega(K^\bullet) \simeq \Sigma_\omega W^* \otimes \Lambda^{\geq k} E(-k)$ .  $\square$

**Пример 4.1.2.** Картинка ниже содержит пример изотипической компоненты комплекса Кошуля (4.1).



Здесь



Здесь  $k = -|\lambda - \mu'| = -|\mu' - \lambda| = -1$ , и  $|B(\lambda, \mu)| = 3$ . На картинке все стрелки ненулевые. Компоненты веса  $\Sigma_{4,3,2,2,1} \otimes \Sigma_{5,3,3,1}$  появляются в 4

степенях в следующих  $G$ -модулях:

$$\begin{aligned}
& \Sigma_{4,3,2,1,1}U^* \otimes \text{Sym}^1 U^* \otimes \Sigma_{5,3,2,1}V^* \otimes \text{Sym}^1 V^*, \\
& \Sigma_{4,3,2,1}U^* \otimes \text{Sym}^2 U^* \otimes \Sigma_{4,3,2,1}V^* \otimes \text{Sym}^2 V^*, \\
& \Sigma_{4,2,2,1,1}U^* \otimes \text{Sym}^2 U^* \otimes \Sigma_{5,3,1,1}V^* \otimes \text{Sym}^2 V^*, \\
& \Sigma_{3,3,2,1,1}U^* \otimes \text{Sym}^2 U^* \otimes \Sigma_{5,3,2}V^* \otimes \text{Sym}^2 V^*, \\
& \Sigma_{4,2,2,1}U^* \otimes \text{Sym}^3 U^* \otimes \Sigma_{4,3,1,1}V^* \otimes \text{Sym}^3 V^*, \\
& \Sigma_{3,3,2,1}U^* \otimes \text{Sym}^3 U^* \otimes \Sigma_{4,3,2}V^* \otimes \text{Sym}^3 V^*, \\
& \Sigma_{3,2,2,1,1}U^* \otimes \text{Sym}^3 U^* \otimes \Sigma_{5,3,1}V^* \otimes \text{Sym}^3 V^*, \\
& \Sigma_{3,2,2,1}U^* \otimes \text{Sym}^4 U^* \otimes \Sigma_{4,3,1}V^* \otimes \text{Sym}^4 V^*.
\end{aligned}$$

Комплекс изоморфен

$$\Sigma_{4,3,2,2,1}U^* \otimes \Sigma_{5,3,3,1}V^* \otimes \Lambda^\bullet \mathbb{k}^3(1).$$

Мы описали изотипические компоненты комплекса Кошуля. Оказывается, они все являются обрезанными комбинаторными кубами. Эти комплексы ациклически ровно в том случае, когда размерность куба положительна и куб не обрезан. Опишем изотипические компоненты, которые являются 0-кубами или  $k$ -ыми обрезанными кубами для  $k > 0$ .

**Определение 4.1.3.** Обозначим

$$l^{a,b}(\lambda) = \max\{k \mid (a+k, b+k) \in \lambda\} + 1.$$

Например,  $l^{0,0}(\lambda) = l(\lambda)$  и  $l^{k,k}(\lambda) = l(\lambda) - k$ , где  $l(\lambda)$  — длина главной диагонали (см. 1.2.1).

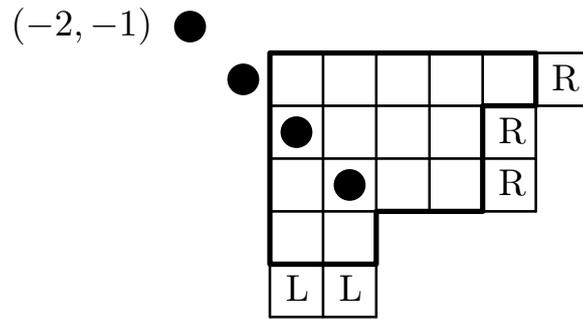
Две следующие леммы полностью описывают 0-кубы в комплексе (4.1). В лемме 4.1.4 мы строим комбинаторные 0-кубы в комплексе. В лемме 4.1.6 мы покажем, что подкомплексы, описанные в предыдущей лемме, исчерпывают все 0-кубы в комплексе 4.1.

**Лемма 4.1.4.** *Фиксируем диаграмму Юнга  $\nu$  и  $a, b \in \mathbb{Z}$ , для которых  $k = l^{a,b}(\nu) \geq 0$ . Тогда изотипическая компонента веса  $(\lambda, \mu) = (\mathbf{e}(\nu, a+k), \mathbf{e}(\nu', b+k))$  в комплексе Кошуля (4.1) изоморфна комбинаторному 0-кубу  $(\Sigma_\lambda U^* \otimes \Sigma_\mu V^*)(k)$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим клетку  $c = (a+k-1, b+k-1)$  в конце диагонали, начинающейся в  $(a, b)$ . Тогда существует  $a+k$  столбцов с клеткой  $c$  или

левее и  $b+k$  строк с клеткой  $c$  или выше. Добавим по клетке, отмеченной ‘L’, в конец каждого из первых  $a+k$  столбцов и по клетке, отмеченной ‘R’, в конец каждой из первых  $b+k$  строк. Если  $c' = (x, y) \in \nu$  лежит на диагонали или ниже, то существует клетка, отмеченная ‘L’, ниже  $c'$ . Если  $c' = (x, y) \in \nu$  лежит на диагонали или выше, то существует клетка, отмеченная ‘R’, справа от  $c'$ . Значит,  $B(\mathbf{e}(\nu, a+k), \mathbf{e}(\nu', b+k)) = \emptyset$ , и утверждение данной леммы очевидно следует из леммы 4.1.1.  $\square$

**Пример 4.1.5.** Следующая картинка содержит пример конструкции, приведённой выше. Рассмотрим диаграмму  $\nu = (5, 4, 4, 2)$  внутри жирной линии и  $(a, b) = (-2, -1)$ . Тогда диагональ, начинающаяся в  $(a, b)$ , является множеством клеток, отмеченным точками  $l = 4$ . Мы видим, что  $\lambda = (5, 4, 4, 2, 2)$  и  $\mu = (6, 5, 5, 2)' = (4, 4, 3, 3, 3, 1)$ , и изотипическая компонента веса  $(\lambda, \mu)$  в  $K^\bullet$  равна  $(\Sigma_{5,4,4,2,2}U^* \otimes \Sigma_{4,4,3,3,3,1}V^*)(4)$ .



**Лемма 4.1.6.** Пусть  $(\lambda, \mu)$  — вес группы  $G$ , изотипическая компонента которого является комбинаторным 0-кубом в комплексе Кошуля (4.1). Тогда существует диаграмма  $\nu$ , удовлетворяющая предположениям леммы 4.1.4, для которой  $\lambda = \mathbf{e}(\nu, a+k)$  и  $\mu' = \mathbf{e}(\nu', b+k)$ .

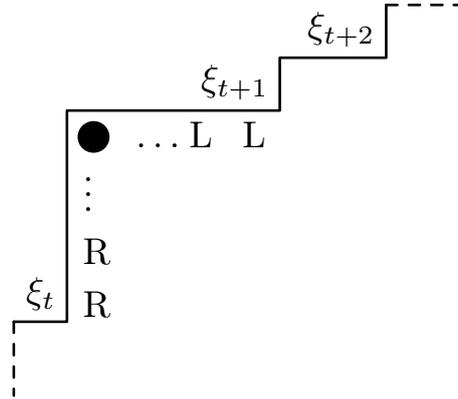
*Доказательство.* Пусть  $\theta$  — диаграмма  $\lambda \cup \mu'$ , где клетки  $\lambda - \mu'$  отмечены ‘L’, а клетки  $\mu' - \lambda$  отмечены ‘R’. По построению имеем  $\theta_L \cap \theta_R = \emptyset$ . Поскольку  $\text{pr}_{(\lambda, \mu)}(K^\bullet) = \Sigma_\lambda U^* \otimes \Sigma_\mu V^* \otimes \Lambda^{\geq k} \mathbb{K}^n(-k)$  является комбинаторным 0-кубом, по предложению 4.1.1 имеем

- $n = |B(\lambda, \mu)| = 0$ ;
- $k = a - |\lambda - \mu'| = b - |\mu' - \lambda| \leq 0$ ;
- в каждом столбце не более одной клетки  $\lambda - \mu'$ ;
- в каждой строке не более одной клетки  $\mu' - \lambda$ .

Из последних двух условий существует  $l = |\lambda - \mu'|$  столбцов с буквой 'L' и  $r = |\mu' - \lambda|$  строк с буквой 'R'.

Обозначим  $\xi_i = (x_i, y_i)$  для  $i = 1, \dots, s$  клетки  $\nu = \lambda \cap \mu'$ , для которых  $(x_i + 1, y_i) \notin \nu$  и  $(x_i, y_i + 1) \notin \nu$  (то есть угловые клетки диаграммы  $\nu$ ). Поскольку  $x_i \neq x_j$  для  $i \neq j$ , можно считать, что  $x_1 < x_2 < \dots < x_s$ . Поэтому  $y_1 > y_2 > \dots > y_n$ . Множество  $B(\lambda, \mu)$  состоит из клеток  $\xi_i = (x_i, y_i)$ , для которых  $(x_i, y_i + 1) \notin \lambda - \mu'$  и  $(x_i + 1, y_i) \notin \mu' - \lambda$ . Поскольку  $|B(\lambda, \mu)| = 0$ , для каждой  $\xi_i$  существует буква 'L' в  $(x_i, y_i + 1)$  или буква 'R' в  $(x_i + 1, y_i)$ .

Допустим, для некоторого  $t$  выполнено  $(x_t + 1, y_t) \in \theta_R$  и  $(x_{t+1}, y_{t+1} + 1) \in \theta_L$ . Поскольку  $\theta_0 \cup \theta_L = \lambda$  и  $\theta_0 \cup \theta_R = \mu'$  являются диаграммами Юнга, клетки выше  $(x_t + 1, y_t)$ , не принадлежащие  $\theta_0$ , принадлежат  $\theta_R$ , а клетки слева от  $(x_{t+1}, y_{t+1} + 1)$ , не принадлежащие  $\theta_0$ , принадлежат в  $\theta_L$ . Таким образом,  $(x_t + 1, y_{t+1} + 1) \in \theta_L \cap \theta_R = \emptyset$ .

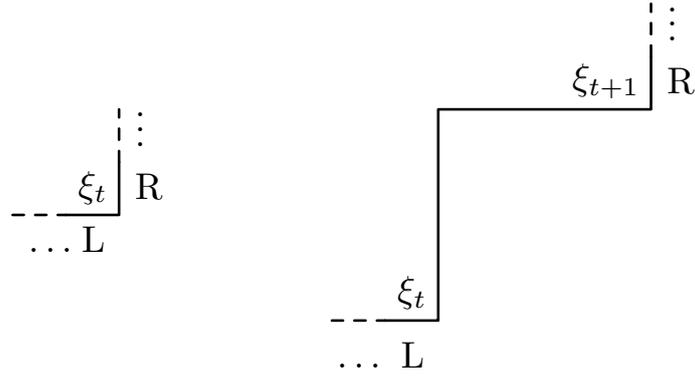


На картинке выше клетка  $(x_t + 1, y_{t+1} + 1)$  отмечена точкой. Если клетка  $(x_t, y_t + 1)$  содержит 'L', то в каждом столбце левее  $\xi_t$  есть клетка с 'L'. Если клетка  $(x_t + 1, y_t)$  содержит 'R', то в каждом столбце выше  $\xi_t$  есть клетка с 'R'.

Значит, если  $(x_t + 1, y_t) \in \theta_R$ , то  $(x_{t'}, y_{t'} + 1) \notin \theta_L$  и  $(x_{t'} + 1, y_{t'}) \in \theta_R$  для  $t' > t$ . Аналогичным образом если  $(x_t, y_t + 1) \in \theta_L$ , то  $(x_{t'} + 1, y_{t'}) \notin \theta_R$  и  $(x_{t'}, y_{t'} + 1) \in \theta_L$  для  $t' < t$ . Имеет место один двух следующих случаев.

- Для некоторого  $t$  верно  $(x_t + 1, y_t) \in \theta_R$  и  $(x_t, y_t + 1) \in \theta_L$ .
- Для некоторого  $t$  верно  $(x_t, y_t + 1) \in \theta_L$ ,  $(x_{t+1}, y_{t+1} + 1) \notin \theta_L$ ,  $(x_t + 1, y_t) \notin \theta_R$  и  $(x_{t+1} + 1, y_{t+1}) \in \theta_R$ .

Эти случаи изображены на следующей картинке.



Допустим, выполнен первый случай. Тогда для любого  $t' \geq t$  верно  $(x_{t'} + 1, y) \in \theta_R$  для  $y_{t'+1} < y \leq y_{t'}$  и  $y \geq 0$  (то есть в конце каждой строки не ниже  $y_t$  есть клетка, содержащая 'R'). Для любого  $t' \leq t$  верно  $(x, y_{t'} + 1) \in \theta_L$  для  $x_{t'-1} < x \leq x_{t'}$  и  $x \geq 0$  (то есть в конце каждого столбца не правее  $x_t$  есть клетка, содержащая 'L'). С другой стороны,  $\theta_L$  и  $\theta_R$  не могут иметь других клеток. Иначе мы получим клетку в  $\theta_L \cap \theta_R$ . Тогда  $(x_t, y_t) = (|\lambda - \mu'|, |\mu' - \lambda|) = (l, r)$ , и для  $k = a - l = b - r$  имеем  $l^{a,b}(\nu) = -k$ .

Допустим, имеет место второй случай. Мы видим по крайней мере  $x_t$  клеток с 'L' и по крайней мере  $y_{t+1}$  клеток с 'R'. Это значит, что  $l \geq x_t$  и  $r \geq y_{t+1}$ . В одном из этих условий выполнено равенство, иначе клетка  $(x_t + 1, y_{t+1} + 1)$  содержит 'LR'. Допустим  $r = y_{t+1}$  (второй случай аналогичен). Если  $l > x_t$ , то существует ещё  $l - x_t$  клеток с 'L', и они могут быть расположены только в строке  $y_{t+1} + 1$ .

Очевидно, в обоих случаях имеем  $\lambda = \mathbf{e}(\nu, a + k)$  и  $\mu = \mathbf{e}(\nu', b + k)$ .  $\square$

**Следствие 4.1.7.** Если  $a \leq 0$  и  $b \leq 0$ , то в комплексе Кошуля (4.1) нет изотипической компоненты, являющийся  $k$ -ым обрезанным комбинаторным кубом для  $k > 0$ .

*Доказательство.* Допустим, для некоторого веса  $\omega = (\lambda, \mu)$  группы  $G$  изотипическая компонента есть  $k$ -ый обрезанный комбинаторный куб. Тогда  $\mathrm{rg}_\omega(K^\bullet) = \Sigma_\omega W^* \otimes \Lambda^{\geq k} \mathbb{K}^n(-k) \neq 0$  для некоторого  $n$ . Тогда он имеет ненулевую компоненту степени 0. Но эта компонента лежит в  $\Lambda^\bullet W^* \otimes \mathrm{Sym}^a U^* \otimes \mathrm{Sym}^b V^*$ . Поэтому эта компонента содержит  $a$  букв 'L' и  $b$  букв 'R' в каждой  $\theta \in Y_{m,n}^\omega(w, a, b)$ , где  $w = \mathrm{wt}(\lambda \cap \mu')$ . Тогда  $a = b = 0$  и  $\theta_L = \theta_R = \emptyset$ . Это означает, что  $k = 0$ .  $\square$

Теперь докажем теорему 1.2.2.

*Доказательство.* По следствию 2.2.3 требуется вычислить группы когомологий комплекса (4.1) представлений  $G$  в случае  $a = b = 0$ . По следствию 4.1.7 среди изотипических компонент комплекса (4.1) нет обрезанных кубов. Тогда только комбинаторные 0-кубы дают вклад в группы когомологий. По леммам 4.1.4 и 4.1.6 изотипическая компонента веса  $(\lambda, \mu)$  группы  $G$  является 0-кубом степени  $k$ , если и только если существует диаграмма  $\nu$ , для которой  $\lambda = \mathbf{e}(\nu, a + k)$ , и  $\mu = \mathbf{e}(\nu, b + k)$ , и  $l^{a,b}(\nu) = k$ . Но  $a = b = 0$ , поэтому  $l^{a,b}(\nu) = l(\nu)$ .  $\square$

*Замечание 4.1.8.* Правая часть равенства теоремы 1.2.2 кажется независимой от  $m$  и  $n$ . Но  $\dim U^* = m$  и  $\dim V^* = n$ . Поэтому если диаграмма  $\lambda$  имеет более  $m$  строк, или диаграмма  $\mu$  имеет более  $n$  строк, то  $U_\lambda^* \otimes V_\mu^* = 0$ .

Обозначим через  $\tilde{S}(w, a, b, k)$  множество отмеченных диаграмм  $\theta$ , для которых  $\text{wt}(\theta_0) + k = w$ ,  $|\theta_L| = a$ ,  $|\theta_R| = b$  и  $|\theta_L \cap \theta_R| = k$ . Если изотипическая компонента веса  $\omega$  в (4.1) изоморфна  $\Sigma_\theta W^* \otimes \Lambda^{\geq k} E(-k)$  для  $k > 0$ , векторного пространства  $E$  размерности  $N$  и  $\omega = \omega(\theta)$ , то  $\theta \in \tilde{S}(w, a, b, k)$ . Для каждого такого комбинаторного куба существует канонический элемент  $\theta$ , где каждая клетка, лежащая в  $B(\theta)$ , отмечена ‘LR’. Обозначим множество таких отмеченных диаграмм через  $S(w, a, b, k)$ . Тогда каждый  $k$ -ый обрезанный комбинаторный  $N$ -куб  $\Sigma_\theta W^* \otimes \Lambda^{\geq k} E(-k)$  соответствует единственному элементу  $\theta \in S(w, a, b, k)$ , где  $N = B(\theta)$ .

Другими словами,  $S(w, a, b, k)$  есть множество таких отмеченных диаграмм Юнга, что

- в каждом столбце не более одной клетки отмечено ‘L’, в одном столбце не более одной клетки отмечено ‘R’;
- неотмеченных клеток  $w - k$ ;
- буквой ‘L’ отмечено  $a + k$  клеток, буквой ‘R’ отмечено  $b + k$  клеток;
- каждая клетка множества  $B(\omega(\theta))$  отмечена ‘LR’.

**Теорема 4.1.9.** *Рассмотрим вложение Сегре  $X = \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$ . Пусть  $a \geq -m$  и  $b \geq -n$ . Тогда существует резольвента*

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} R_{1,k+1}^{a,b} \otimes \mathcal{O}(-1 - k) \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} R_{0,k}^{a,b} \otimes \mathcal{O}(-k) \longrightarrow \mathcal{O}_X(a, b) \longrightarrow 0,$$

где  $m = \dim U$ ,  $n = \dim V$  и

$$R_{p,p+q}^{a,b} = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{l^{a,b(\nu)=q \\ \text{wt}(\nu)=p}} U_{\mathbf{e}(\nu,a+q)}^* \otimes V_{\mathbf{e}(\nu',b+q)}^*, & q > 0 \text{ или } p = q = 0; \\ \bigoplus_{\theta \in S(a,b,p,k)} \left( U_{\lambda(\theta)}^* \otimes V_{\mu(\theta)}^* \right)^{\oplus \binom{|B(\theta)|-1}{k}}, & q = 0, p > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

*Доказательство.* Рассмотрим стандартную резольвенту диагонали (2.2). Как в доказательстве леммы 2.4.3, построим резольвенту  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(a, b)$ . По лемме 2.4.3 для  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(a, b)$  и мы имеем

$$R_{p,p+q}^{a,b} = \mathbb{H}^q \left( \mathbb{P}^N, \Omega_{\mathbb{P}(W^*)}^p(p) \otimes \mathcal{O}_X(a, b) \right) \cong \left( \text{Tor}_p^S(\mathbb{k}, F(\mathcal{O}_X(a, b))) \right)_q,$$

где правую часть можно вычислить при помощи комплекса Кошуля (4.1).

Есть два типа изотипических компонент, дающих вклад в группы когомологий комплекса Кошуля  $K^\bullet$  (4.1). Это комбинаторные 0-кубы и обрезанные комбинаторные кубы. По леммам 4.1.4 и 4.1.6 если изотипическая компонента веса  $(\lambda, \mu)$  является комбинаторным 0-кубом и даёт вклад в  $\mathbb{H}^q((K^\bullet)_p)$ , то  $\nu = \lambda \cap \mu$ ,  $\text{wt}(\nu) = p$ ,  $\lambda = \mathbf{e}(\nu, q + l)$  и  $\mu' = \mathbf{e}(\nu', q + l)$ , где  $l = l^{a,b}(\mu)$  и  $(K^\bullet)_p$  —  $p$ -ая однородная компонента  $K^\bullet$ . Это соответствует первой строке в (4.3).

Теперь опишем обрезанные комбинаторные кубы. Каждый элемент  $\theta \in S(a, b, p, k)$  соответствует подмодулю  $(\Sigma_\theta W^*)^{\oplus \binom{|B(\theta)|-1}{k}}$  в пространстве сизигий  $R_{p,p}^{a,b}$ .  $\square$

Поскольку теорема 4.1.9 и все необходимые леммы функториальны по векторным пространствам  $U$  и  $V$ , мы можем применить те же рассуждения в относительной ситуации. Это доказывает следующий результат, обобщающий теорему 4.1.9.

**Теорема 4.1.10.** Пусть  $B$  — гладкое алгебраическое многообразие, на котором заданы векторные расслоения  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$ . Рассмотрим относительное вложение Сегре  $\mathcal{X} = \mathbb{P}_B(\mathcal{U}) \times_B \mathbb{P}_B(\mathcal{V}) \subset \mathbb{P}_B(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$ . Допустим,  $a \geq -\text{rk}(\mathcal{U})$  и  $b \geq -\text{rk}(\mathcal{V})$ . Тогда пучок  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(a, b)$  имеет следующую резольвенту:

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{R}_{1,k+1}^{a,b} \otimes \mathcal{O}(-1 - k) \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{R}_{0,k}^{a,b} \otimes \mathcal{O}(-k) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(a, b) \longrightarrow 0,$$

где

$$\mathcal{R}_{p,p+q}^{a,b} = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{l^{a,b(\nu)=q \\ \text{wt}(\nu)=p}} \Sigma_{\mathbf{e}(\nu,a+q)} \mathcal{U}^* \otimes \Sigma_{\mathbf{e}(\nu',b+q)} \mathcal{V}^*, & q > 0 \text{ или } p = q = 0; \\ \bigoplus_{\theta \in S(a,b,p,k)} \left( \Sigma_{\lambda(\theta)} \mathcal{U}^* \otimes \Sigma_{\mu(\theta)} \mathcal{V}^* \right)^{\oplus \binom{|B(\theta)|-1}{k}}, & q = 0, p > 0. \end{cases}$$

*Замечание 4.1.11.* На прямой сумме пространств сизигий существует естественная структура алгебры. Рассмотрим комплекс Кошуля  $K^\bullet$  вложения Серге (определённый в 4.1) и выберем эквивариантные проекцию  $p$  и вложение  $i$ :

$$\mathcal{A} = K^\bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{i} \end{array} \mathbf{H}^\bullet(K^\bullet),$$

где  $p \circ i = \text{Id}$ . Обозначим умножение на комплексе Кошуля через  $\pi$ . Тогда умножение на сизигиях можно задать формулой

$$\varpi(x, y) = p(\pi(i(x), i(y))).$$

Обозначим  $Y = \bigcup_{p,q} Y_{m,n}(p, q, q)$ . Тогда  $\mathcal{A} = \bigoplus_{\theta \in Y} \Sigma_\theta W^*$ . Обратим внимание, что каждый  $G$ -подмодуль в прямой сумме пространств сизигий входит в сумму с кратностью 1. Кроме того, в алгебре  $\Lambda^\bullet W^*$  каждый  $G$ -модуль встречается с кратностью 1. Значит, умножение

$$\varpi: \bigoplus_{\theta_1} \Sigma_{\theta_1} W^* \otimes \bigoplus_{\theta_2} \Sigma_{\theta_2} W^* \rightarrow \bigoplus_{\theta_3} \Sigma_{\theta_3} W^*$$

можно задать структурными константами  $\varpi_{\theta_1, \theta_2}^{\theta_3}$ .

Рассмотрим три отмеченных диаграммы  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in Y$ . Тогда из теоремы 1.2.2 имеем  $\omega(\theta_i) = (\mathbf{e}(\nu_i, s_i), \mathbf{e}(\nu'_i, s_i))$ , где  $s_i = l(\nu_i)$ . Тогда  $\varpi_{\theta_1, \theta_2}^{\theta_3} \neq 0$ , если и только если  $s_1 + s_2 = s_3$  и  $\nu_3 \subseteq \nu_1 \otimes \nu_2$  во внешней алгебре  $\Lambda^\bullet W^*$ . (Напомним, что  $\Lambda^\bullet W^* = \bigoplus_\nu U_\nu^* \otimes V_{\nu'}^*$ .)

Очевидно, что если  $s_3 \neq s_1 + s_2$  или  $\nu_3 \not\subseteq \nu_1 \otimes \nu_2$ , то из однородности и эквивариантности умножения  $\varpi_{\theta_1, \theta_2}^{\theta_3} = 0$ . Допустим,  $s_3 = s_1 + s_2$  и  $\nu_3 \subseteq \nu_1 \otimes \nu_2$ . Тогда  $\varpi_{\theta_1, \theta_2}^{\theta_3} \neq 0$ , так как  $G$ -подмодуль  $\Sigma_{\theta_3} W^*$  лежит  $\varpi(\Sigma_{\theta_1} W^*, \Sigma_{\theta_2} W^*)$ , имеет кратность 1 в комплексе Кошуля  $K^\bullet$  и в сизигиях, и проекция  $p$  поэтому его не зануляет.

## 4.2. Квадратичное вложение Веронезе

Пусть  $G = \text{GL}(V)$ , где  $V$  — векторное пространство размерности  $n$ . Обозначим  $K^\bullet$  комплекс Кошуля вложения Веронезе  $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\text{Sym}^2 V)$ :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \Lambda^{p+1} \text{Sym}^2 V^* \otimes \text{Sym}^{a+q-2} V^* &\rightarrow \\ &\rightarrow \Lambda^p \text{Sym}^2 V^* \otimes \text{Sym}^{a+q} V^* \rightarrow \\ &\rightarrow \Lambda^{p-1} \text{Sym}^2 V^* \otimes \text{Sym}^{a+q+2} V^* \rightarrow \dots, \end{aligned} \quad (4.4)$$

определённый в (2.5).

**Лемма 4.2.1.** Пусть  $\omega = (a_1, \dots, a_k | b_k, \dots, b_1)$  — диаграмма Юнга. Допустим, в ней можно отметить несколько клеток, получив диаграмму  $\theta$ , принадлежащую множеству  $Z_n(\omega, a)$ . Тогда существует изоморфизм

$$\mathrm{pr}_\omega(K^\bullet) = V_\lambda \otimes \Lambda^{\geq s} \mathbb{k}^{C(\omega)}(r),$$

где  $s = \frac{a}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{|a_i - b_i - 1|}{2}$ , и  $r = \sum_{i=1}^k \frac{a_i - b_i + 1}{2} - |C(\omega)|$ . Иначе  $\mathrm{pr}_\omega(K^\bullet) = 0$ .

*Доказательство.* Если не существует окрашенной диаграммы  $\theta$  формы  $\omega$ , то  $\mathrm{pr}_\omega(K^\bullet) = 0$ . Далее будем считать, что существует.

Все такие диаграммы отличаются только наборами окрашенных клеток. Рассмотрим пару таких окрашенных диаграмм  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Неокрашенная часть всегда состоит из крюков вида  $(l | l - 1)$ . Поэтому отличаться могут только пары клеток  $(l - 1, l - 1 + b_l)$  и  $(l + b_l, l - 1)$  для  $l \in C(\omega)$  (множество  $C$  определено в 3.3.7). В каждой окрашенной диаграмме  $\theta$  формы  $\omega$  обязательно окрашены  $s = \sum_{i=1}^k |a_i - b_i - 1|$  клеток. Изотипическая компонента веса  $\omega$  в комплексе  $K^\bullet$  соответствует окрашенным диаграммам Юнга  $\theta$ , в каждой из которых для некоторых  $l \in C(\omega)$  концы главного  $l$ -го крюка одновременно окрашены, и таких  $l$  по крайней мере  $\frac{a-s}{2}$ . Обозначим через  $Z_n^\omega(a)$  множество таких окрашенных диаграмм  $\theta$ .

По предложению 3.2.3 изотипическая компонента веса  $\omega$  в комплексе Кошуля  $K^\bullet$  изоморфна

$$V_\omega \otimes \bigoplus_{\lambda \in Z_n^\omega(a)} \mathbb{k},$$

где дифференциал  $d$  индуцирован дифференциалом  $d$  на  $\bigoplus_{\lambda \in Z_n^\omega(a)} \mathbb{k}$ , где  $d_{\lambda_1}^{\lambda_2} \neq 0$ , если и только если  $V_{\lambda_1}^* \subseteq V_{\lambda_2}^* \otimes \mathrm{Sym}^2 V^*$ . Пусть  $\theta_0$  — окрашенная диаграмма формы  $\omega$ , имеющая наименьшее число окрашенных клеток и для которой множество неокрашенных клеток имеет форму  $(c_1, \dots, c_n | c_n - 1, \dots, c_1 - 1)$  для некоторых  $c_1 > \dots > c_n$ . В такой диаграмме для каждого  $l \in C(\omega)$  не окрашены клетки на концах  $l$ -ого главного крюка. Выберем в решётке  $\mathfrak{X}$  весов группы  $\mathrm{GL}(V)$  систему координат, где диаграмма Юнга  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$  имеет координаты  $(\mu_1, \dots, \mu_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$ . Пусть векторы  $e_1, \dots, e_n$  — стандартный базис данной системы координат. Обозначим  $v_i = e_{l-1} + e_{l-1+b_l}$ . Тогда

каждая поддиаграмма неотмеченных клеток в  $\theta \in Z_n^\omega(a)$  соответствует точке  $\lambda_0 - \sum_{l \in C(\omega)} \varepsilon_l v_l$  для  $\varepsilon_l \in \{0, 1\}$ . Очевидно, что множество  $Z_n^\omega$  соответствует пересечению  $C(\omega)$ -мерного единичного куба в подрешётке  $\mathfrak{Z}$  с нулевой точкой  $\lambda_0$ , порождённой  $v_l$  для  $l \in C(\omega)$ , с полупространством  $\sum_{l \in C(\omega)} \varepsilon_l \geq s$ .

Значит вершины куба находятся в соответствии с базисом пространства  $\Lambda^{\geq s} E$ , где векторное пространство  $E$  порождено векторами  $\xi_l$  для  $l \in C(\omega)$ . Вершина  $\lambda_0 - \sum_{l \in C'} e_l$  соответствует базисному вектору  $\Lambda_{l \in C'} \xi_l$  для каждого  $C' \subseteq C(\omega)$ . Таким образом, по лемме 3.1.4 изотипическая компонента веса  $\omega$  в комплексе  $K^\bullet$  является  $s$ -мы обрезанным комбинаторным  $C(\omega)$ -кубом.

Остаётся заметить, что компонента старшей степени комплекса имеет  $\sum_{i=1}^k (a_i - b_i + 1)$  закрашенных клеток. Следовательно, эта компонента имеет степень  $\sum_{i=1}^k \frac{a_i - b_i + 1}{2} - |C(\omega)|$ . Поэтому мы имеем  $\text{pr}_\omega(K^\bullet) \simeq V_\omega^* \otimes \Lambda^{\geq s} \mathbb{K}^{C(\omega)} \left( \sum_{i=1}^k \frac{a_i - b_i + 1}{2} - |C(\omega)| \right)$ .  $\square$

**Предложение 4.2.2.** *Изотипическая компонента веса  $\omega$  в комплексе (4.4) является комбинаторным 0-кубом, если и только если диаграмма Юнга  $\omega$  симметрична, то есть  $\omega = \omega'$ , и чётность  $\text{wt}(\omega)$  совпадает с чётностью  $a$ .*

*Доказательство.* Заметим, что в комплексе (4.4) каждая диаграмма  $\theta$  имеет  $a + 2k$  закрашенных клеток для различных  $k$ . В каждом главном крюке диаграммы  $\theta$  может быть не более одной закрашенной клетки снизу. Таким образом, каждый главный крюк не менее широкий, чем высокий. Пусть  $\theta = (a_1, \dots, a_k | b_k, \dots, b_1)$ . Допустим, диаграмма  $\theta$  не симметрична. Пусть  $l$  максимальное такое, что  $a_l \neq b_l$ . Значит,  $a_l > b_l$ . Но либо  $k = l$ , либо  $a_{l+1} = b_{l+1} < b_l$ . Значит, клетка  $(b_l + l, l - 1)$  не принадлежит  $\theta$ , так что  $l \in C(\theta)$ . Соответственно, изотипическая компонента веса  $\theta$  не может быть комбинаторным 0-кубом. Значит, каждый главный крюк симметричен. Отсюда следует, что каждый главный крюк содержит одну закрашенную клетку снизу. Количество крюков равно длине диагонали, а её чётность совпадает с чётностью  $a$ . Также очевидно, что для диаграммы  $\theta$ , удовлетворяющей условиям, изотипическая компонента является 0-кубом.  $\square$

**Лемма 4.2.3.** *Допустим,  $a \leq 0$ . Тогда в комплексе  $K^\bullet$  каждая нет изотипической компоненты, изоморфной  $k$ -ому обрезанному комбинаторному кубу для  $k > 0$ .*

*Доказательство.* Из леммы 4.2.1 при  $a \leq 0$  изотипическая компонента веса  $\omega$  изоморфна  $V_\omega \otimes \Lambda^{\geq s} E(r)$  для некоторого  $k$ , для  $s \leq a \leq 0$  и для векторного пространства  $E$ . Значит  $V_\omega \otimes \Lambda^{\geq s} E(r) = V_\omega \otimes \Lambda^\bullet E(r)$ .  $\square$

Теперь докажем теорему 1.2.4.

*Доказательство.* Поскольку в комплексе  $K^\bullet$  в случае  $a = 0$  по лемме 4.2.3 нет обрезанных комбинаторных кубов. Таким образом, вклад в пространства сизигий дадут только изотипические компоненты, являющиеся комбинаторными 0-кубами. По лемме 4.2.1 изотипическая компонента веса  $\omega$  является комбинаторным кубом, если и только если диаграмма  $\omega$  симметрична, и чётность  $a = 0$  равна чётности  $\text{wt}(\omega)$ . Чётность веса симметричной диаграммы совпадает с чётностью длины её диагонали. Так образом, теорема доказана.  $\square$

**Теорема 4.2.4.** Пусть  $X = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\text{Sym}^2 V)$  — вложение Веронезе степени 2. Пусть  $a \geq -n$ . Тогда существует резольвента

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} R_{1,k+1}^a \otimes \mathcal{O}(-k-1) \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} R_{0,k}^a \otimes \mathcal{O}(-k) \longrightarrow \mathcal{O}_X(k) \longrightarrow 0,$$

где  $n = \dim V$  и

$$R_{p,p+q}^a = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\omega = \omega' \\ \text{wt}(\omega) = q \\ l(\omega) = 2q - a}} V_\omega^*, & q > 0 \text{ или } p = q = 0, \\ \bigoplus_{\substack{\omega = (a_1, \dots, a_k | b_k, \dots, b_1) \\ b_i \leq a_i \leq b_{i-1} + 1, \ i = 1, \dots, k \\ \text{wt}(\omega) = 2p + a}} (V_\omega^*)^{\oplus \binom{|C(\omega)| - 1}{s}}, & p > 0, q = 0, s \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.5)$$

где  $s = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^k |a_i - b_i - 1| - a \right)$ .

*Доказательство.* По лемме 2.4.3 пространства  $R_{p,q}^a$  вычисляются комплексом Кошуля (4.4). По лемме 4.2.1 все изотипические компоненты этого комплекса являются обрезанными комбинаторными кубами. Комбинаторные 0-кубы в комплексе (4.4) описываются предложением 4.2.2 и соответствуют первой строке (4.5). Теперь опишем обрезанные комбинаторные кубы.

Каждый обрезанный комбинаторный куб имеет компоненту минимальной степени в нуле. Возьмём диаграмму  $\omega$ . В ней обязательно закрашено  $\sum_{i=1}^k |a_i - b_i - 1|$  клеток. Всего в диаграмме, соответствующей подмодулю в нулевой степени, закрашено  $a$  клеток. Множество  $C(\omega)$  соответствует

крюкам, в которых ещё могут быть закрашены клетки. Кроме обязательно закрашенных, ещё есть  $s = \frac{1}{2} \left( a - \sum_{i=1}^k |a_i - b_i - 1| \right)$  крюков. Заметим, что если число  $s$  оказалось нецелым, то в комплексе нет окрашенной диаграммы формы  $\omega$ . Чтобы окрасить некоторые клетки в  $\omega$  и получить окрашенную диаграмму, соответствующую подмодулю в комплексе Кошуля, необходимо, чтобы окрашенных клеток было не более одной в каждом столбце. При этом незакрашенные клетки должны образовывать диаграмму формы  $(c_1, \dots, c_k | c_k - 1, \dots, c_1 - 1)$  для некоторых  $c_i$ . Значит, в нашей диаграмме мы в  $i$ -ый крюк можем добавить не более одной клетки снизу и не более  $b_{i-1} + 1 - a_i$  клеток справа. Это равносильно неравенствам  $b_i \leq a_i \leq b_{i-1} + 1$  для  $i = 1, \dots, k$ . Остаётся заметить, что мы получили  $s$ -ый обрезанный комбинаторный  $C(\omega)$  куб, таким образом, подмодуль  $V_\omega^*$  даёт вклад в когомологии с кратностью  $\binom{C(\omega)-1}{s}$ .  $\square$

**Теорема 4.2.5.** *Допустим,  $V$  — гладкое алгебраическое многообразие, на котором задано векторное расслоение  $\mathcal{V}$ . Рассмотрим относительное квадратичное вложение Веронезе  $\mathcal{X} = \mathbb{P}_B(\mathcal{V}) \subset \mathbb{P}_B(\text{Sym}^2 \mathcal{V})$ . Допустим,  $a \geq -\text{rk} \mathcal{V}$ . Тогда пучок  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(a)$  имеет следующую резольвенту:*

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{R}_{1,k+1}^a \otimes \mathcal{O}(-k-1) \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{R}_{0,k}^a \otimes \mathcal{O}(-k) \longrightarrow \mathcal{O}(k) \longrightarrow 0,$$

где

$$\mathcal{R}_{p,p+q}^a = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\omega=\omega' \\ \text{wt}(\omega)=q \\ l(\omega)=2q-a}} \mathcal{V}_\omega^*, & q > 0 \text{ или } p = q = 0, \\ \bigoplus_{\substack{\omega=(a_1, \dots, a_k | b_k, \dots, b_1) \\ b_i \leq a_i \leq b_{i-1} + 1 \\ \text{wt}(\omega)=2p+a}} (\mathcal{V}_\omega^*)^{\oplus \binom{|C(\omega)|-1}{s}}, & p > 0, q = 0, \end{cases}$$

где  $s = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^k |a_i - b_i - 1| - a \right)$ .

*Доказательство.* Заметим, что предыдущая теорема и все необходимые для неё утверждения функториальны по векторному пространству  $V$ . Отсюда следует утверждение над базой.  $\square$

# Приложение А

## Представления с простым спектром

### А.1. Классификация представлений со свойствами 3.2.1 и 3.2.2

Пусть  $G$  — полупростая группа. Через  $\pi_i$  мы будем обозначать  $i$ -ый фундаментальный вес группы  $G$  (см. [28]). Классифицируем представления, обладающие свойствами 3.2.1 и 3.2.2.

Заметим, что свойство 3.2.2 для веса  $\lambda \otimes \mu$  полупростой группы  $G \times H$  равносильно тому, что это свойство выполнено для веса  $\lambda$  группы  $G$  и для веса  $\mu$  группы  $H$ .

**Предложение А.1.1.** Пусть  $G$  — простая некоммутативная алгебраическая группа,  $\pi$  — такой доминантный вес этой группы, что для любого другого веса  $\mu$  в представлении  $V_\pi \otimes V_\mu$  группы  $G$  нет кратных подпредставлений. Тогда с точностью до дуализации пара  $(G, \pi)$  является одной из перечисленных в следующей таблице:

$\mathrm{SL}(n)$	$k\pi_1, k \geq 1$
$\mathrm{SL}(n)$	$\pi_k, k \geq 1$
$\mathrm{SO}(2n + 1)$	$\pi_1, \pi_n$
$\mathrm{SO}(2n)$	$\pi_1, \pi_{n-1}, \pi_n$
$\mathrm{Sp}(2n)$	$\pi_1$
$E_6$	$\pi_1$
$G_2$	$\pi_1$

*Доказательство.* Это утверждение проверяется прямым вычислением.  $\square$

Отсюда мы видим, что свойство 3.2.2 выполнено только в случае  $G = \mathrm{SL}(n_1) \times \dots \times \mathrm{SL}(n_k)$  и весов вида  $a_1\pi_1 \otimes \dots \otimes a_k\pi_k$  с точностью до дуализации некоторых из весов  $\pi_i$ . Поскольку мы рассматриваем проективизации орбит старшего веса в неприводимых представлениях, это ограничивает рассматриваемые случаи многообразиями Сегре–Веронезе. Теперь разберём, какие из весов данного вида обладают свойством 3.2.1.

**Предложение А.1.2.** Пусть  $G = \mathrm{SL}(n_1) \times \dots \times \mathrm{SL}(n_k)$ , и вес  $\pi = a_1\pi_1 \otimes \dots \otimes a_k\pi_k$  группы  $G$  обладает свойством 3.2.1. Тогда пара  $(G, \pi)$  является одной из перечисленных в следующей таблице:

$\mathrm{SL}(n)$	$\pi_1$
$\mathrm{SL}(n)$	$2\pi_1$
$\mathrm{SL}(2)$	$k\pi_1, k \leq 6$
$\mathrm{SL}(3)$	$3\pi_1$
$\mathrm{SL}(n) \times \mathrm{SL}(m)$	$\pi_1 \otimes \pi_1$
$\mathrm{SL}(3) \times \mathrm{SL}(2)$	$2\pi_1 \otimes \pi_1$
$\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(k), k \leq 5$	$2\pi_1 \otimes \pi_1$
$\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$	$3\pi_1 \otimes \pi_1$
$\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$	$\pi_1 \otimes \pi_1 \otimes \pi_1$

*Доказательство.* В случае двух нетривиальных бесконечных серий положительный ответ даётся формулами Коши (см.[16]):

$$\mathrm{Sym}^k(U \otimes V) = \bigoplus_{\mathrm{wt}(\lambda)=k} U_\lambda \otimes V_\lambda, \quad \Lambda^k(U \otimes V) = \bigoplus_{\mathrm{wt}(\lambda)=k} U_\lambda \otimes V_{\lambda'}.$$

Для оставшихся случаев положительный ответ непосредственно проверяется. Чтобы проверить, что для прочих случаев условие не выполнено, достаточно произвести проверку конечного числа случаев, пользуясь двумя соображениями:

- если  $U \subset V$ , и для веса  $\pi$  группы  $\mathrm{SL}(U)$  в представлении  $\Lambda^k U_\pi$  есть кратные подпредставления, то кратные подпредставления есть и в представлении  $\Lambda^k V_\pi$  группы  $\mathrm{SL}(V)$ ;
- если в представлении  $\Lambda_k V_\lambda$  есть кратные подпредставления, то кратные представления есть и в представлении  $\Lambda^k V_{\lambda+\pi_i}$  для любого фундаментального веса  $\pi_i$  группы  $\mathrm{SL}(V)$ .

Таким образом, достаточно легко проверить, что ни для каких других случаев требуемое свойство не выполнено. Соответствующий перебор случаев мы опустим.  $\square$

## Приложение Б

### Взвешенные проективные пространства

Отдельный интерес представляет исследование сизигий взвешенных проективных пространств. В общей постановке рассматривается вложение многообразия  $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n) \subset \mathbb{P}^N$ . В таком виде решение задачи представляется крайне трудным. Так, если рассмотреть простейший случай  $\mathbb{P}(1^l, k^m)$  и вложить в проективное пространство наименьшей возможной размерности, то задача описания сизигий оказывается эквивалентной вычислению сизигий пространства  $\mathbb{P}^l$ , вложенного по Веронезе степени  $k$ . Однако в случае  $\mathbb{P}(1^l, 2^m)$  задача сводится к квадратичному вложению Веронезе, для которого ответ получен. Таким образом, имеет место следующий результат.

**Предложение Б.0.3.** Пусть  $R_{p,q}$  — пространства сизигий взвешенного проективного пространства  $\mathbb{P}(1^l, 2^m) \subset \mathbb{P}^{\binom{l+1}{2}+m}$ . Тогда существует изоморфизм представлений группы  $\mathrm{GL}(l)$ :

$$R_{p,q} = \bigoplus_{\substack{\lambda=\lambda' \\ \mathrm{wt}(\lambda)=2q \\ l(\lambda)=2q-2p}} \Sigma_{\lambda} \mathbb{k}^l.$$

В действительности, данное многообразие получается из квадратичного многообразия Веронезе, если несколько раз вложить многообразие в проективное пространство размерности, большей на 1, и там взять конус над многообразием. Очевидно, что эта операция не влияет на сизигии, так что данный результат является очевидным следствием 1.2.4. На уровне комплекса Кошуля происходит тензорное умножение всего комплекса на  $\mathbb{k}[\mathbb{k}^m]$ , что аннулируется тензорным умножением на  $\mathbb{k}$ . Трудность вычисления сизигий для более общих взвешенных проективных пространств связана в том числе с тем, что группа автоморфизмов таких многообразий значительно меньше (в случае попарно разных весов это лишь тор), и теория представлений этих групп не является достаточно богатой для описания сизигий в терминах её представлений.

# Приложение В

## Примеры

### В.1. Сизигии

**Пример В.1.1.** Рассмотрим вложение Сегре  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$ . Существует три диаграммы ширины не более 2 и высоты не более 1. Тогда алгебра сизигий состоит из трёх  $GL(2) \times GL(3)$ -модулей.

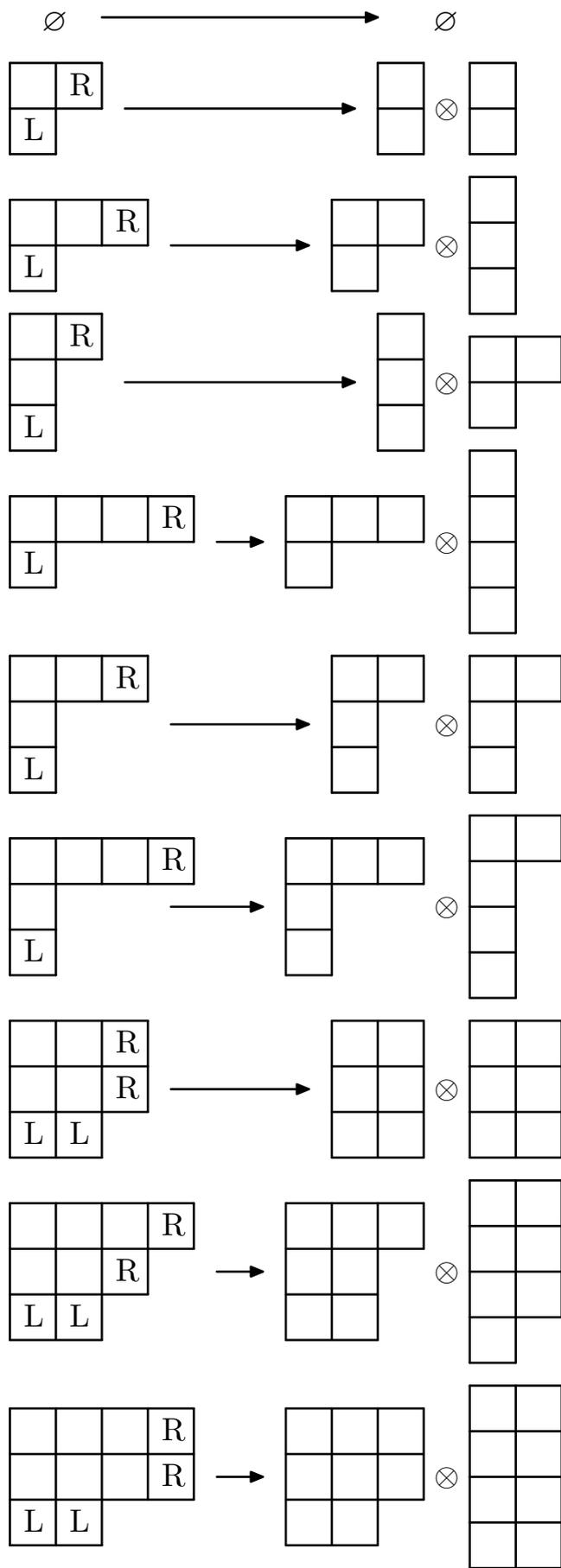
$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \longrightarrow & \emptyset \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & R \\ \hline L & \\ \hline \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & R \\ \hline L & & \\ \hline \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \mathbb{k} = R_{0,0} \\
 \Lambda^2 U^* \otimes \Lambda^2 V^* = R_{1,2} \\
 \Sigma_{2,1} U^* \otimes \Lambda^3 V^* = R_{2,3}
 \end{array}$$

Имеем  $R_{1,2} = \Lambda^2 \mathbb{k}^2 \otimes \Lambda^2 \mathbb{k}^3$ ,  $R_{2,3} = \Sigma_{2,1} \mathbb{k}^2 \otimes \Lambda^3 \mathbb{k}^3$ , алгебра сизигий имеет нулевое умножение.

В частности, существует следующая резольвента:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

**Пример В.1.2.** Рассмотрим вложение Сегре  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^{11}$ . Существует 10 диаграмм ширины не более 3 и высоты не более 2. Алгебра сизигий состоит из десяти  $GL(3) \times GL(4)$ -модулей.



$$\mathbb{k} = R_{0,0}$$

$$\Lambda^2 U^* \otimes \Lambda^2 V^* = R_{1,2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_{2,1} U^* \otimes \Lambda^3 V^* \\ \Lambda^3 U^* \otimes \Sigma_{2,1} V^* \end{array} \right\} R_{2,3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_{3,1} U^* \otimes \Lambda^4 V^* \\ \Sigma_{2,1,1} U^* \otimes \Sigma_{2,1,1} V^* \end{array} \right\} R_{3,4}$$

$$\Sigma_{3,1,1} U^* \otimes \Sigma_{2,1,1,1} V^* = R_{4,5}$$

$$\Sigma_{2,2,2} U^* \otimes \Sigma_{2,2,2} V^* = R_{4,6}$$

$$\Sigma_{3,2,2} U^* \otimes \Sigma_{2,2,2,1} V^* = R_{5,7}$$

$$\Sigma_{3,3,2} U^* \otimes \Sigma_{2,2,2,2} V^* = R_{5,7}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
R_{1,2} &= \Lambda^2 \mathbb{k}^3 \otimes \Lambda^2 \mathbb{k}^4, \\
R_{2,3} &= \Sigma_{2,1} \mathbb{k}^3 \otimes \Lambda^3 \mathbb{k}^4 \oplus \Lambda^3 \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{1,2} \mathbb{k}^4, \\
R_{3,4} &= \Sigma_{3,1} \mathbb{k}^3 \otimes \Lambda^4 \mathbb{k}^4 \oplus \Sigma_{2,1,1} \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{2,1,1} \mathbb{k}^4, \\
R_{4,5} &= \Sigma_{3,1,1} \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{2,1,1,1} \mathbb{k}^4 \\
R_{4,6} &= \Sigma_{2,2,2} \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2} \mathbb{k}^4, \\
R_{5,7} &= \Sigma_{3,2,2} \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2,1} \mathbb{k}^4, \\
R_{6,8} &= \Sigma_{3,3,2} \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2,2} \mathbb{k}^4.
\end{aligned}$$

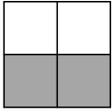
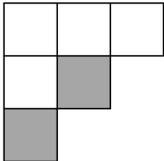
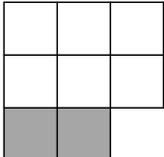
Существуют только следующие ненулевые отображения умножения между этими модулями:

$$\begin{aligned}
R_{1,2} \times R_{3,4} &\rightarrow R_{4,6}, & R_{1,2} \times R_{4,5} &\rightarrow R_{5,7}, & R_{2,3} \times R_{2,4} &\rightarrow R_{4,6}, \\
R_{2,3} \times R_{3,5} &\rightarrow R_{5,7}, & R_{2,3} \times R_{4,6} &\rightarrow R_{6,8}, & R_{3,4} \times R_{3,4} &\rightarrow R_{6,8}.
\end{aligned}$$

В частности, существует следующая резольвента:

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow \mathcal{O}(-7)^3 &\rightarrow \mathcal{O}(-6)^{12} \rightarrow \mathcal{O}(-5)^{12} \oplus \mathcal{O}(-4)^{24} \rightarrow \\
&\rightarrow \mathcal{O}(-3)^{60} \rightarrow \mathcal{O}(-2)^{52} \rightarrow \mathcal{O}(-1)^{18} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

**Пример В.1.3.** Рассмотрим квадратичное вложение Веронезе  $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$ . Существует 4 симметричных диаграммы Юнга с чётной длиной диагонали высоты не больше 3.

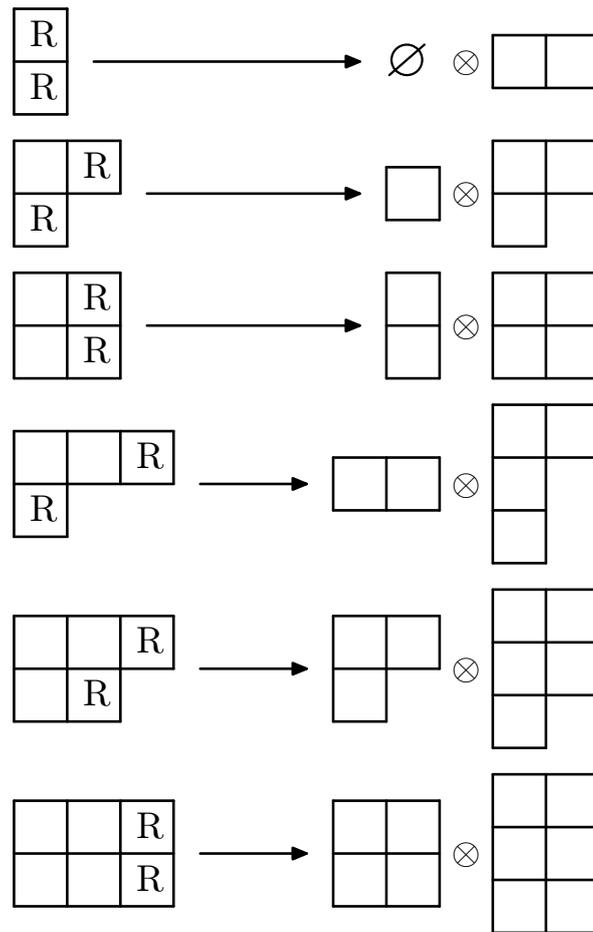
$\emptyset$	$\mathbb{k} = R_{0,0}$
	$\Sigma_{2,2} V^* = R_{1,2}$
	$\Sigma_{3,2,1} V^* = R_{2,3}$
	$\Sigma_{3,3,2} V^* = R_{3,4}$

В частности, существует следующая резольвента:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-4)^{\oplus 3} \rightarrow \mathcal{O}(-3)^{\oplus 8} \rightarrow \mathcal{O}(-2)^{\oplus 6} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

## В.2. Резольвенты пучков

**Пример В.2.1.** Рассмотрим вложение Сегре  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$  и пучок  $\mathcal{O}(-1, 1)$ . Тогда существует 6 изотипических компонент, являющихся 0-кубами, и нет обрезанных кубов.



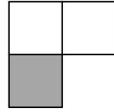
Получается следующая резольвента:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-5) \rightarrow \mathcal{O}(-4)^6 \rightarrow \mathcal{O}(-3)^{15} \rightarrow \\ \rightarrow \mathcal{O}(-2)^{16} \rightarrow \mathcal{O}(-1)^6 \rightarrow \mathcal{O}_X(-1, 1) \rightarrow 0.$$

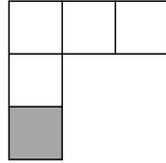
**Пример В.2.2.** Рассмотрим вложение Веронезе  $X = \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$  и пучок  $\mathcal{O}_X(1)$ . Тогда существует 4 изотипические компоненты, являющиеся 0-кубами, и нет обрезанных кубов.



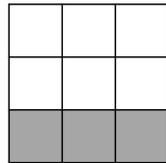
$$V^* = R_{0,0}$$



$$\Sigma_{2,1} V^* = R_{1,1}$$



$$\Sigma_{3,1,1} V^* = R_{2,2}$$



$$\Sigma_{3,3,3} V^* = R_{3,4}$$

Получается следующая резольвента:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-3) \oplus \mathcal{O}(-2)^{\oplus 6} \rightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 8} \rightarrow \mathcal{O}^{\oplus 3} \rightarrow \mathcal{O}_X(1) \rightarrow 0.$$

## Публикации по теме диссертации

- [1] И. В. Нетай, “Алгебры сизигий вложений Серре”, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:3 (2013), 54–74 [Math-Net.Ru](#) [crossref](#); *Funct. Anal. Appl.*, **47**:3 (2013), 210–226 [crossref](#) [ISI Web of Knowledge](#).
- [2] И. В. Нетай, “Параболически связанные подгруппы”, *Матем. сб.*, **202**:8 (2011), 81–94 [Math-Net.Ru](#) [crossref](#) [MathSciNet](#); *Sb. Math.*, **202**:8 (2011), 1169–1182 [crossref](#) [ISI Web of Knowledge](#).
- [3] И. В. Нетай, “Сизигии вложений Серре”, *тезисы летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых учёных России, Ярославль, ЯГПУ, 2013*, 65–67.
- [4] И. В. Нетай, “Syzygies of quadratic Veronese embedding”, *тезисы международной русско-китайской конференции Torus actions: topology, geometry and number theory, Хабаровск, ТОГУ, 2013*, 53–55.

## Список литературы

- [5] D. Hilbert, “Uber die Theorie der algebraischen Formen”, *Ges. Abh.*, **II 2** (1970), 199–257.
- [6] D. Eisenbud, *The Geometry of Syzygies*, 2002.
- [7] B. Saint-Donat, “On Petri’s analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve”, **206** (1973), 157–175.
- [8] A. L. Gorodentsev, A. S. Khoroshkin, A. N. Rudakov, “On syzygies of highest weight orbits”, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, **221** (2007), 79–120.
- [9] G. Ottaviani, R. Paoletti, “Syzygies of Veronese embeddings”, arXiv: [9811131](#).

- [10] Thavn Vu, “ $N_6$  property for third Veronese embedding”, arXiv: [1303.5532v1](#).
- [11] E. Rubei, “On syzygies of Segre embeddings”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **130**:12 (2002), 3483–3493.
- [12] L. Manivel, “On the syzygies of flag manifolds”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **124**:8 (1996).
- [13] D. Eisenbud, M. Green, K. Hulek, S. Popescu, “Restricting linear syzygies: algebra and geometry”, 2004, arXiv: [0404516v1](#).
- [14] A. Snowden, “Syzygies of Segre embeddings and  $\Delta$ -modules”, arXiv: [1006.5248v4](#).
- [15] J. Weyman, *Cohomology of vector bundles and syzygies*, CUP, 2003 [crossref](#).
- [16] W. Fulton, *Young tableaux*, CUP, 1997.
- [17] M. Green, “Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, I, II”, *J. Diff. Geom.*, **19**, **20** (1984), 125–171, 279–289.
- [18] 橋本光靖 (Mitsuyasu Hashimoto), “Determinantal Ideals and Their Betti Numbers — A Survey”, *数理解析研究所講究録*, **第857巻** (1994年), 40–50.
- [19] A. Lascoux, “Syzygies de variétés déterminantales”, *Adv. Math.*, **30** (1978), 202–237.
- [20] V. Reiner, J. Roberts, “Minimal resolutions and the homology of matching and chessboard complexes”, 1997.
- [21] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, “Гомологическая алгебра”, *Алгебра – 5*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **38**, ВИНТИ, М., 1989, 5–233 [Math-Net.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [22] G. Lancaster, J. Towber, “Representation-functors and flag-algebras for the classical groups”, *J. Algebra*, **59** (1979), 16–38.
- [23] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:4 (1972), 749–764 [Math-Net.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#); *Math. USSR-Izv.*, **6**:4 (1972), 743–758 [crossref](#).
- [24] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, Graduate Texts in Mathematics, **129**, Springer-Verlag, 1991.
- [25] A. Polyshchuk, L. Positselsky, *Quadratic algebras*, AMS, 2005.
- [26] J. Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Springer-Verlag, 1995..
- [27] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, М.:Мир, 1985.
- [28] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинары по группам Ли и алгебраическим группам*, УРСС, 1995.