Листок 4. Борелевские множества

Анализ, 2 курс, **7.11.2014**

4⋄1 **а)** Докажите, что борелевская σ-алгебра на прямой порождается всеми отрезками. **б)** Докажите, что достаточно рассматривать лишь отрезки с рациональными концами.

4⋄2 **а)** Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n$ – борелевское множество. Докажите, что aE (где $a \in \mathbb{R}$) и $E + v$ (где $v \in \mathbb{R}^n$) – борелевские множества.
б) Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^2$ – борелевское множество. Докажите, что все его сечения $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ – борелевские множества.

Все счетные объединения замкнутых множеств называются множествами класса F_σ, а все счетные пересечения открытых множеств образуют класс G_δ. Можно также рассматривать множества $F_{\sigma\delta}$ и $G_{\delta\sigma}$, которые являются счетными пересечениями множеств из F_σ и счетными объединениями множеств из G_δ, соответственно.

4⋄3 К какому из выше перечисленных классов принадлежит множество точек разрыва любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

4⋄4 Докажите, что классы F_σ и G_δ на отрезке не совпадают.

4⋄5 Пересечение конечного или счётного числа плотных множеств класса G_δ в полном метрическом пространстве – снова плотное множество класса G_δ.

Множество, которое можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств называется *множеством первой категории Бэра*. Остальные множества называются *множествами второй категории*.

4⋄6 Опишите наименьшую σ-алгебру, содержащую все множества **а)** первой категории; **б)** второй категории.

4⋄7 Докажите, что множество всех точек дифференцируемости любой непрерывной функции — борелевское. Какому классу оно принадлежит?

4⋄8 Пусть f_n последовательность непрерывных функций на отрезке. Докажите, что множество всех точек сходимости последовательности f_n — борелевское. Какому классу оно принадлежит?

4⋄9 Докажите, что функцию Дирихле, принимающую значение один в рациональных точках и значение ноль в иррациональных, нельзя представить в качестве поточечного предела последовательности непрерывных функций.

4⋄10 Представьте функцию Римана

$$R(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q,\ (p,q) = 1; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

в виде предела (поточечного) последовательности непрерывных функций.