

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА. ЛИСТОК 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Обязательные задачи: 1,2,3а-в,; 4а,б,г,д,е; 5, 6а,6в. Срок сдачи - 20 ноября.

1. Пусть $z = x + iy \equiv re^{i\phi}$, где $r > 0$ (при $z \neq 0$) и $-\pi < \phi \leq \pi$. Обозначим $\phi = \arg z$. Определим $\ln z$ как $\ln z = \ln |z| + i \arg z$. Верно ли, что $\ln z^2 = 2 \ln z$ и $\ln |z|^2 = \ln z + \ln \bar{z}$.

2. Определим обобщенные функции $\ln(x + i0)$ и $\ln(x - i0)$ из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ как пределы локально интегрируемых функций $\ln(x \pm i\varepsilon)$ переменной x при $\varepsilon \rightarrow 0$. Покажите, что

а) $\ln(x + i0) + \ln(x - i0) = 2 \ln |x|$, б) $\ln(x + i0) - \ln(x - i0) = 2\pi i \theta(-x)$.

в) $(\ln(x \pm i0))' = \frac{1}{x \pm i0}$,

3. Найдите аналитические представления обобщенных функций на прямой (т.е., представьте обобщенные функции в виде разности предельных значений функции, аналитической в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и функции, аналитической в нижней полуплоскости $\text{Im } z < 0$):

а) $\delta(x)$; б) $(x \pm i0)^{-1}$; в) $1/x$;
г) $\ln |x|$; д) $\theta(x)$.

4. Найти Фурье-образы обобщенных функций

а) $\frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2}$; б) $\frac{\sin ax}{x}$; в) $\theta(x)$;
г) $\delta(x - a)$; д) $(x \pm i0)^{-1}$; е) $\frac{1}{x}$; ж)* $\ln(x \pm i0)$.

5. а) Найдите фундаментальное решение оператора теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (т.е., решение уравнения $u'_t - u''_{xx} = \delta(t)\delta(x)$, равное нулю при $t < 0$. *Указание:* примените преобразование Фурье по x).

б) Найдите функцию Грина задачи Коши $u'_t - u''_{xx} = f(x, t)$ при $t > 0$; $u(x, 0) = 0$.

6. Пусть $a(t)$ – непрерывная функция.

а) Покажите, что задача Коши $u' + a(t)u = f(t)$, $u(0) = u_0$, где $u(t) \in C^1([0, +\infty))$ эквивалентна задаче нахождения обобщенной функции $u(t)$ с носителем на полупрямой $[0, +\infty)$, удовлетворяющей уравнению

$$u' + a(t)u = f(t)\theta(t) + u_0\delta(t);$$

б)* Переформулируйте аналогичным образом задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка.

в) Используйте результаты задач 2б) и 3а) для нахождения распределения температуры $u(x, T)$ в момент времени T , считая, что в момент времени $t = 0$ она распределена по закону $u(x, 0) = e^{ax^2}$, и меняется со временем согласно уравнению теплопроводности $u'_t - u''_{xx} = 0$.

7. Найдите пределы $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x}$ в смысле обобщенных функций \mathcal{S}' , где $\frac{e^{i\lambda x}}{x}$ понимается в смысле главного значения.

8. Пусть $f(x)$ – локально интегрируемая функция, растущая при $x \rightarrow \infty$ не быстрее полинома, $\hat{f}(\xi)$ – ее преобразование Фурье. Тогда аналитическое представление $\hat{f}(\xi)$ можно получить с помощью двух преобразований Лапласа. Используйте этот прием для получения аналитического представления преобразования Фурье функций $f(x) = x$ и $f(x) = |x|$.