Листок 3 (принимается 24.11, можно сдавать раньше)

Пусть $f\colon X \to Y$ – непрерывное отображение топологических пространств. Для любого пучка $\mathcal{G}$ на Y определим его *обратный образ* $f^*\mathcal{G}$ на X как пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \lim_{V\supset f(U)} \mathcal{G}(V)$, где U – произвольное открытое множество в X, а предел берется по всем открытым множествам V в Y, содержащим $f(U)$.

3.1. Пусть X – топологическое пространство, X' – топологическое пространство с тем же множеством точек и дискретной топологией, и $f\colon X' \to X$ – отображение, действующее тривиально на точках. Для пучка $\mathcal{G}$ на X опишите предпучок $U \mapsto \lim_{V\supset f(U)} \mathcal{G}(V)$ (см. определение выше) в этом случае и покажите, что он, вообще говоря, не пучок.

3.2. Покажите, что сужение на подпространство (см. задачу 1.3 из первого листка) есть обратный образ относительно вложения. Дайте определение обратного образа в терминах накрытия.

3.3. Пусть $f\colon X \to Y$ – непрерывное отображение топологических пространств. Покажите, что для любого пучка $\mathcal{F}$ на X существует естественное отображение $f^*f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, а для любого пучка $\mathcal{G}$ на Y – естественное отображение $\mathcal{G} \to f_*f^*\mathcal{G}$.

3.4. Покажите, что функтор обратного образа сопряжен слева функтору прямого образа, (а прямой образ – сопряжен справа обратному), то есть в условиях предыдущей задачи определен естественный изоморфизм

$$Hom(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) = Hom(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Как этот изоморфизм связан с отображениями из предыдущей задачи?

3.5. Покажите, что функтор f^* точен, то есть переводит точные последовательности в точные. *Указание:* опишите слой обратного образа пучка в точке.