# Листок 5: Тензорное произведение

Задачи по коммутативной алгебре - матфак ВШЭ

надо сдать до 28.11.2014 включительно

**1** Пусть $I, J$ – идеалы в кольце $A$. Покажите, что $A/I \otimes_A A/J \cong A/(I+J)$.

**2** Пусть $S$ - некоторое мультипликативно замкнутое подмножество кольца $A$. Покажите, что $S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$. Покажите, что $S^{-1}A$ – плоский $A$-модуль (напомним, что $A$-модуль называется плоским, если тензорное умножение на него сохраняет точность последовательностей $A$-модулей).

**3** Сравните $\mathbf{Z}[[T]] \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}[[T]]$, а также $\prod_{n\in\mathbf{N}}((\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})$ и $(\prod_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

**4** Пусть $M$, $N$ – конечно порожденные модули над локальным кольцом $A$. Покажите, что если $M \otimes_A N = 0$, то $M = 0$ или $N = 0$ (указание: используйте лемму Накаямы).

**5** Пусть $A$ – целостное локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал, $K = Frac(A)$ и $k = A/\mathfrak{m}$. Пусть $M$ – конечно порожденный $A$-модуль. Покажите, что $dim_k(M \otimes_A k) \geq dim_K(M \otimes_A K)$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда $M$ свободен. Указание: сначала выведите из леммы Накаямы, что если $(e_1, \ldots, e_r)$ – базис $M/mM$, а $x_i$ - некоторые прообразы $e_i$ в $M$, то $x_i$, $1 \leq i \leq r$, порождают $M$.

**6** Пусть $A$ – кольцо, $\phi : A^m \to A^n$ – сюръекция $A$-модулей. Используя тензорное произведение, покажите, что $m \geq n$.

**7** В условиях предыдущей задачи покажите, что если $m = n$, то $\phi$ изоморфизм. Указание: по одной из задач предыдущих листков достаточно разобрать случай локального кольца.

**8** Опишите делители нуля в алгебрах $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{3})$, разложив эти конечные алгебры над полем в прямое произведение полей (ср. с задачами листка 2 о структуре конечных алгебр над полем).

**9** Можно ли разложить в прямое произведение полей алгебру $\mathbf{F}_p(X) \otimes_{\mathbf{F}_p(X^p)} \mathbf{F}_p(X)$? Здесь $\mathbf{F}_p(X)$ обозначает поле рациональных функций одной переменной над полем из $p$ элементов, а $\mathbf{F}_p(X^p)$ – его подполе, состоящее из функций от $X^p$.

**10** Говорят, что $A$-модуль $P$ проективен, если для сюръективного гомоморфизма $M \to N$ индуцированное отображение $Hom_A(P, M) \to Hom_A(P, N)$ тоже сюръективно (легко проверить, что это означает, что $Hom_A(P, *)$ - точный функтор). Докажите, что модуль проективен тогда и только тогда, когда он изоморфен прямому слагаемому свободного модуля.

**11** Докажите, что проективный модуль плоский.

**12** Докажите, что конечно порожденный проективный модуль над локальным кольцом свободен.

**13** Пусть $A = \mathbf{C}[T]$. Какие из следующих $A$-алгебр плоские над $A$ (т.е. являются плоскими $A$-модулями): $A[X]/(X^2 - T)$; $A[X]/(TX - 1)$; $A[X]/(TX - T)$?

Нарисуйте соответствующие отображения спектров.