1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

5 Двумерные теории бозонов и фермионов

6 Переход к операторному формализму

6.1 Квантовая механика

Давайте представим себе, что мы знаем только об описании квантовой механики на языке функционального интеграла. А именно, амплитуда перехода из начального в конечное состояние задаётся выражением

$$K(x_f, x_i|T) = \int\limits_{x(0)=x_i, x(T)=x_f} \mathcal{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^T (\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x))dt\right) \tag{6.1}$$

С помощью этой амплитуды волновая функция в момент времени T записывается как $\psi(x_f, T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x_f, x_i|T)\psi(x_i, 0)dx_i$

Попробуем его переписать немного в другой форме, предварительно дискретизировав по очевидному правилу: $\int dt \mapsto \Delta t \sum$, $\frac{df}{dt} \mapsto \frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta t}$

$$K(x_f, x_i|T) = \int\limits_{x_0=x_i, x_{N+1}=x_f} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{N}(\frac{m(x_i - x_{i+1})^2}{2\Delta t} - V(x_i)\Delta t)\right)\frac{dx_1}{A}....\frac{dx_N}{A} \tag{6.2}$$

Где $A = \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m}}$ находится, например, из принципа “свёртка амплитуд – тоже амплитуда”.

$$K(x_f, x_i|T) = \int K(x_f, x_N|\Delta t)K(x_N, x_{N-1}|\Delta t)...K(x_1, x_i|\Delta t)dx_1...dx_N \tag{6.3}$$

То, что написано здесь – свёртка ядер интегральных операторов! Теперь разберёмся с ядром одного оператора. Утверждается, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar m}} \exp\left(\frac{im(x_i - x_{i+1})^2}{2\hbar\Delta t}\right) = \left[e^{\frac{i\hbar\Delta t}{2m}\frac{d^2}{dx^2}}\right](x_{i+1}, x_i) \tag{6.4}$$

Конструкция в правой части означает ядро оператора $e^{\frac{i\hbar\Delta t}{2m}\frac{d^2}{dx^2}}$, вычисленное в паре точек x_{i+1}, x_i. Теперь, пользуясь малостью Δt, объединяем обе части оператора

$$K(x_{i+1}, x_i) \approx \exp(\frac{-i\Delta t}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right))(x_{i+1}, x_i) \tag{6.5}$$

Здесь можно радостно узнать гамильтониан частицы в потенциале $V(x)$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{6.6}$$

Напомним, что положено делать с этим гамильтонианом в случае осциллятора (для простоты все константы, в том числе, частота, положены единичными):

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \tag{6.7}$$

Где $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right)$, $\hat{a}\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x\right)$ удовлетворяют стандартному соотношению $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Пространство состояний нашей системы устроено стандартным образом: волновая функция основного состояния $\psi_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, и весь остальной базис $\psi_n(x) = (\hat{a}^\dagger)^n\psi_0(x)$. Уровни энергии, соответствующие этим волновым функциям, будут теперь $E_n = n + \frac{1}{2}$. Это важный пример, потому что *все* невзаимодействующие теории поля сводятся к сумме осцилляторов и их фермионных версий.

6.2 Хронологическое упорядочение

Предположим, что нас теперь интересует не амплитуда перехода из одного состояния в другое, а, например, среднее от некоторых операторов при бесконечном времени эволюции.

$$\langle x(t_1)x(t_2)\rangle = \frac{\langle 0|\hat{K}(\infty - t_1)\hat{x}\hat{K}(t_1 - t_2)\hat{x}\hat{K}(t_2 - (-\infty))|0\rangle}{\langle 0|\hat{K}(\infty - (-\infty))|0\rangle} \tag{6.8}$$

Правая часть это просто записанный по-другому функциональный интеграл! (Это нужно немного обдумать). Если теперь ввести операторы в картине Гейзенберга

$$\hat{x}(t) = \hat{K}(-t)\hat{x}\hat{K}(t) \tag{6.9}$$

то наше выражение можно записать как

$$\langle x(t_1)x(t_2)\rangle = \langle 0|\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)|0\rangle, \;\; t_1 > t_2 \tag{6.10}$$

При этом важно, что $t_1 > t_2$, в противоположном случае нужно было бы $\hat{x}(t_i)$ расставить в другом порядке. Т.е., мы приходим к формуле

$$\langle x(t_1)x(t_2)\rangle = \langle 0|T\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)|0\rangle \tag{6.11}$$

связывающей корреляторы, вычисленные двумя способами.

Здесь по определению $T\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2) = \begin{cases} t_1 > t_2 : x(t_1)\hat{x}(t_2) \\ t_1 < t_2 : x(t_2)\hat{x}(t_1) \end{cases}$

Посмотрим, как теперь будут выглядеть типичные выражения для операторов в теории: $\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$, значит

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-it}\hat{a} + e^{it}\hat{a}^\dagger\right) \tag{6.12}$$

Заметим, что в евклидовой теории вместо оператора эволюции будет $e^{-\hat{H}t}$, потому

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-t}\hat{a} + e^{t}\hat{a}^\dagger\right) \tag{6.13}$$

Обратите внимание, что множители перед операторами решают уравнения движения классической теории $(-\frac{d^2}{dt^2} + 1)f(t) = 0$

6.3 Гамильтониан свободной бозонной теории

Теперь можно перейти к теории безмассовых бозонов на цилиндре

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^L dx \int_{-\infty}^{\infty} dt \left((\partial_t\phi(x,t))^2 + (\partial_x\phi(x,t))^2\right) \tag{6.14}$$

Нас снова будет интересовать амплитуда перехода за бесконечно маленькое время, потому было бы логично дискретизировать действие: тогда оно станет очень похожим на ту самую квантовую механику, просто с очень большим числом степеней свободы.

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\sum_{i,j}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}(\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j})^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x}(\phi_{i,j} - \phi_{i,j+1})^2\right) \tag{6.15}$$

Эта амплитуда перехода

$$K(\phi_{i+1}, \phi_i|\Delta t) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\sum_j \frac{\Delta x}{\Delta t}(\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j})^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x}(\phi_{i,j} - \phi_{i,j+1})^2\right) \tag{6.16}$$

Заметим, что теперь этот оператор эволюции зависит от двух огромных наборов переменных: каждый из ϕ_i, ϕ_{i+1} зависит ещё от “пространственной переменной” j.

Потому в непрерывном пределе волновые функции станут *функционалами от* $\phi(x)$ *при фиксированном* t, а свёртка волновой функции с оператором эволюции – сама по себе континуальным интегрированием

$$\Psi[\phi(x)](t) = \int \mathcal{D}[\tilde{\phi}(x)] K[\phi(x), \tilde{\phi}(x)] \Psi[\tilde{\phi}(x)](t) \tag{6.17}$$

Воспользуемся опять знанием о ядре теплопроводности

$$\exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\sum_j \frac{\Delta x}{\Delta t}(\phi_j - \tilde{\phi}_j)^2\right) = \exp\left(2\pi\alpha'\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_j \frac{d^2}{d\phi_j^2}\right)(\phi_i, \tilde{\phi}_i) \tag{6.18}$$

Для того, чтобы предел получился хорошим и очевидным, нужно стремить Δx и Δt к нулю так, чтобы их отношение тоже стремилось к нулю, но это всё тонкости. Можно просто объединить две экспоненты

$$K(\phi_i, \tilde{\phi}_i|\Delta t) = \exp(-\Delta t\left(-\frac{\pi\alpha'}{2\Delta x}\sum_j \frac{d^2}{d\phi_j^2} + \frac{1}{2\pi\alpha'\Delta x}\sum_j (\phi_j - \phi_{j+1})^2\right)) \tag{6.19}$$

Теперь хочется опять перейти от этого выражения к непрерывному пределу. Для этого нужно заменить $\frac{1}{\Delta x}\frac{d}{d\phi_j} \mapsto \frac{\delta}{\delta\phi(x)}$ – на вариационную производную, $\phi_{j+1} - \phi_j \mapsto \Delta x \cdot \partial_x \phi(x)$, $\sum_j \mapsto \frac{1}{\Delta x}\int dx$. При этом получаются очевидные коммутационные соотношения $[\frac{\delta}{\delta\phi(x)}, \phi(y)] = \delta(x-y)$. Непрерывный гамильтониан оказывается равен

$$\hat{H} = \int_0^L \left(-\frac{\pi\alpha'}{2}\frac{\delta^2}{\delta\phi(x)^2} + \frac{1}{2\pi\alpha'}(\partial_x\phi(x))^2\right) dx \tag{6.20}$$

6.4 Пространство состояний

Теперь нашей задачей будет расправиться с бозонным гамильтонианом так же, как мы расправились с осциллятором. Здесь для этого полезно сделать преобразование Фурье:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right)\phi_n \tag{6.21}$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_n \exp\left(\frac{-2\pi i n x}{L}\right)\frac{\partial}{\partial\phi_n} \tag{6.22}$$

Такой выбор коэффициентов связан с тем, что

$$\sum_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) = L\delta(x) \tag{6.23}$$

$$\int\limits_0^L dx \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) = L\delta_n \tag{6.24}$$

Подставим эти выражения в гамильтониан и посмотрим, что получается:

$$\hat{H} = \sum_n \left(-\frac{\pi\alpha'}{2}\frac{\partial^2}{\partial\phi_n\partial\phi_{-n}} + \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{4\pi^2 n^2}{L^2}\phi_n\phi_{-n}\right) \tag{6.25}$$

$$\hat{H} = \pi\alpha' \sum_{n>0} \left(-\frac{\partial^2}{\partial\phi_n\partial\phi_{-n}} + \left(\frac{2n}{\alpha' L}\right)^2 \phi_n\phi_{-n}\right) - \frac{\pi\alpha'}{2}\frac{\partial^2}{\partial\phi_0^2} \tag{6.26}$$

Пользуясь опытом с гармоническим осциллятором, попробуем придумать здесь подходящие операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}_n = -i\sqrt{\frac{\alpha' L}{4}}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_n} + \frac{2n}{\alpha' L}\phi_{-n}\right) \tag{6.27}$$

$$\hat{\bar{a}}_n = -i\sqrt{\frac{\alpha' L}{4}}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_{-n}} + \frac{2n}{\alpha' L}\phi_n\right) \tag{6.28}$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\hat{a}_k, \hat{\bar{a}}_m] = 0$, $[\hat{a}_k, \hat{a}_m] = k\delta_{k+m}$, $[\hat{\bar{a}}_k, \hat{\bar{a}}_m] = k\delta_{k+m}$, т.е., почти как в случае осциллятора. Кроме того, $\hat{a}_n^\dagger = \hat{a}_{-n}$, и так же для операторов с чертой. Черта не соответствует комплексному сопряжению! Эти операторы отвечают волнам, бегущим влево и вправо. Теперь попробуем записать гамильтониан

$$\hat{a}_{-n}\hat{a}_n = \frac{\alpha' L}{4}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\phi_{-n}\partial\phi_n} + \left(\frac{2n}{\alpha' L}\right)^2 \phi_{-n}\phi_n + \frac{2n}{\alpha' L}\phi_n\frac{\partial}{\partial\phi_n} - \frac{2n}{\alpha' L}\frac{\partial}{\partial\phi_{-n}}\phi_{-n}\right) \tag{6.29}$$

$$\hat{\bar{a}}_{-n}\hat{\bar{a}}_n = \frac{\alpha' L}{4}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\phi_{-n}\partial\phi_n} + \left(\frac{2n}{\alpha' L}\right)^2 \phi_{-n}\phi_n - \frac{2n}{\alpha' L}\frac{\partial}{\partial\phi_n}\phi_n + \frac{2n}{\alpha' L}\phi_{-n}\frac{\partial}{\partial\phi_{-n}}\right) \tag{6.30}$$

Отсюда получаем, что

$$\hat{H} = \frac{2\pi}{L}\sum_{n>0}\left(\hat{a}_{-n}\hat{a}_n + \hat{\bar{a}}_{-n}\hat{\bar{a}}_n + 1\right) + \frac{2\pi}{L}\hat{a}_0^2 \tag{6.31}$$

Отдельно удобно ввести “генераторы алгебры Вирасоро”

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2}\hat{a}_0^2 + \sum_{n>0}\hat{a}_{-n}\hat{a}_n \tag{6.32}$$

$$\hat{\bar{L}}_0 = \frac{1}{2}\hat{\bar{a}}_0^2 + \sum_{n>0} \hat{\bar{a}}_{-n}\hat{\bar{a}}_n \tag{6.33}$$

Которые, очевидно, между собой коммутируют.

Построим пространство состояний нашей теории. Как и раньше, потребуем, чтобы волновая функция основного состояния убивалась операторами уничтожения. Заодно и поймём, кто из них – уничтожения. Попробуем потребовать $\hat{a}_{n>0}\Psi[\phi] = 0$, $\hat{\bar{a}}_{n>0}\Psi[\phi] = 0$, $\hat{a}_0\Psi[\phi] = 0$. Если получится нормированная волновая функция, значит мы угадали.

$$\Psi[\phi] = \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{2n}{\alpha' L}\phi_{-n}\phi_n\right) = \exp\left(-\frac{2}{\alpha' L}\sum_{n>0} n|\phi_n|^2\right) \tag{6.34}$$

Она хорошо убывает на бесконечности, значит всё правильно. Эта волновая функция является функцией от бесконечного количества фурье-компонент поля в заданный момент времени. Так и должно быть: мы ведь поняли, что теперь волновые функции будут не функциями, а функционалами.

Мы уже знаем, что операторами рождения будут $\hat{a}_{-n}$ и $\hat{\bar{a}}_{-n}$. Вычислим, на сколько изменяет энергию (точнее, собственное значение $\hat{L}_0$) применение $\hat{a}_{-n}$. Пускай $\hat{L}_0|\Delta\rangle >= \Delta|\Delta\rangle$

$$\hat{L}_0(\hat{a}_{-n}|\Delta\rangle) = [\hat{L}_0, \hat{a}_{-n}]|\Delta\rangle + \hat{a}_{-n}\hat{L}_0|\Delta\rangle = [\hat{a}_{-n}\hat{a}_n, \hat{a}_{-n}]|\Delta\rangle + \hat{a}_{-n}\hat{L}_0|\Delta\rangle = (\Delta + n)\hat{a}_{-n}|\Delta\rangle \tag{6.35}$$

Значит действие $\hat{a}_{-n}$ увеличивает энергию на n единиц. Кроме всего прочего, нужно помнить о ϕ_0, которая входит в гамильтониан как свободная частица, только второй производной. Это означает, что каждое состояние будет задаваться ещё и импульсом по этой координате (в теории струн это будет импульс центра масс струны).

$$|\emptyset;\emptyset;p\rangle = \exp\left(-\frac{2}{\alpha' L}\sum_{n>0} n|\phi_n|^2 + i\sqrt{\frac{4}{\alpha' L}}\cdot p\phi_0\right) \tag{6.36}$$

Произвольное состояние записывается как

$$|n_1, ..., n_k; m_1, ..., m_l; p\rangle = \hat{a}_{-n_1}...\hat{a}_{-n_k}\hat{\bar{a}}_{-m_1}...\hat{\bar{a}}_{-m_l}|\emptyset;\emptyset;p\rangle \tag{6.37}$$

$\hat{a}_{-n}$ между собой коммутируют, потому их можно упорядочить: $n_1 > ... > n_k$, $m_1 > ... > m_l$, значит все состояния с заданной энергией и "импульсом" описываются парой диаграмм Юнга.

6.5 Выражение для операторов в картине Гейзенберга

Из определения операторов $\hat{a}$ и $\hat{\bar{a}}$ легко получить, что

$$\hat{\phi}_n = \frac{-i\sqrt{\alpha' L}}{2n}(\hat{a}_{-n} - \hat{\bar{a}}_n) \tag{6.38}$$

$$\hat{\phi}(x) = -\frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\hat{a}_{-n} - \hat{\bar{a}}_n}{n}\exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) + \frac{\hat{\phi}_0}{\sqrt{L}} \tag{6.39}$$

Теперь сопряжём его оператором эволюции $e^{t\hat{H}}\hat{a}_n e^{-t\hat{H}} = e^{-\frac{2\pi n t}{L}}\hat{a}_n$

$$\hat{\phi}(x,t) = -\frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\hat{a}_{-n}}{n}\exp\left(\frac{2\pi i n(x-it))}{L}\right) + \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}\frac{\hat{\bar{a}}_n}{n}\exp\left(\frac{2\pi i n(x+it))}{L}\right) + \frac{\hat{\phi}_0}{\sqrt{L}} - \frac{2i\pi\sqrt{\alpha'}}{L}\hat{a}_0 t \tag{6.40}$$

Если ввести переменную $\hat{X}$, сопряжённую к $\hat{a}_0$, то получится $\frac{\phi_0}{\sqrt{L}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha'}}X$

Введём удобное обозначение $z = \exp\left(\frac{2\pi(t+ix)}{L}\right)$, которое означает конформное отображение из цилиндра в сферу без пары точек

$$\hat{\phi}(z,\bar{z}) = \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\hat{a}_n}{z^n} + \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\hat{\bar{a}}_n}{\bar{z}^n} - \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}(\hat{a}_0\log z + \hat{\bar{a}}_0\log\bar{z}) + \frac{2}{\sqrt{\alpha'}}\hat{X} \tag{6.41}$$

Внимательно посмотрим на это выражение: оно почти раскладывается на голоморфную и антиголоморфную части, что ожидаемо, исходя из известного вида корреляторов. Кроме того, если взять от него производную, получится честный голоморфный оператор

$$\hat{J}(z) = i\partial\phi(z,\bar{z}) = \sum_n \frac{\hat{a}_n}{z^{n+1}} \tag{6.42}$$

Пару слов нужно сказать о хронологическом упорядочении. Поскольку была сделана экспоненциальная замена, то теперь роль "времени" будет играть радиус, а координаты – угол. Соответственно, вместо хронологического упорядочения станет радиальное.