Задачи по группам и алгебрам Ли – 5. Компактные группы Ли и их представления.

Зачет по данному листку ставится в случае сдачи 80% пунктов задач без звездочки. Задачи со звездочкой стоят вдвое дороже. Дедлайн 11 декабря.

1. а) Алгебра Ли $W_1 := Der(\mathbb{C}[z])$ действует на полиномиальных *тензорных полях* степени λ на прямой по следующему правилу: $f(z)\frac{\partial}{\partial z}(F(z)(dz)^\lambda) := (\lambda f'(z)F(z)+f(z)F'(z))(dz)^\lambda$. Докажите, что это, в самом деле, представление алгебры Ли W_1 (обозначим его Ω^λ). **б)** Докажите, что при $\lambda \neq 0$ представление Ω^λ алгебры Ли W_1 неприводимо. *Указание:* докажите, что, с одной стороны, любое подпредставление содержит вектор $(dz)^\lambda$, а с другой стороны, действие W_1 на этот вектор порождает все пространство Ω^λ. **в)** Постройте какой-нибудь ненулевой гомоморфизм представлений $\Omega^0 \to \Omega^1$. **г*)** Определим действие группы диффеоморфизмов прямой на пространстве гладких тензорных полей следующим образом: для $g \in Diff(\mathbb{R})$ и тензорного поля $F(z)(dz)^\lambda$ имеем $g(F(z)(dz)^\lambda) := F(g^{-1}(z))(g^{-1}(z)')^\lambda(dz)^\lambda$. Докажите, что это представление группы диффеоморфизмов прямой неприводимо при $\lambda \neq 0$.

2. а) Докажите, что подпространство $\{(az^2+bz+c)\frac{\partial}{\partial z} \mid a,b,c \in \mathbb{C}\} \subset W_1$ является подалгеброй Ли, изоморфной $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. **б)** Докажите, что ограничение представления Ω^λ на эту подалгебру $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ неприводимо если и только если $\lambda \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\leq 0}$. **в)** Докажите, что в случае $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\leq 0}$ ограничение представления Ω^λ на подалгебру $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ имеет единственное собственное неприводимое подпредставление, и найдите его размерность.

3. Докажите, что правое действие группы Ли G на себе переводит левоинвариантные векторные поля в левоинвариантные (и аналогично для правоинвариантных векторных полей и левого действия). *Указание:* левоинвариантные векторные поля являются полями скоростей правого действия.

Присоединенным представлением группы Ли G называется линейное действие группы Ли G на ее касательной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (т.е. гомоморфизм $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$), определяемое одним из следующих эквивалентных способов:

(1) как левое действие G на пространстве $\mathfrak{g}$ правоинвариантных векторных полей на G;
(2) как правое действие G на пространстве $\mathfrak{g}$ левоинвариантных векторных полей на G;
(3) как дифференциал в точке $e \in G$ действия группы Ли G на себе сопряжениями (это действие сохраняет точку e, а следовательно задает действие на касательном пространстве $T_eG = \mathfrak{g}$).

Присоединенным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется действие алгебры Ли на себе коммутаторами, т.е. гомоморфизм $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \mathrm{ad}\, x = [x, \cdot]$.

4. а) Докажите, что приведенные выше определения присоединенного представления эквивалентны. **б)** Докажите, что присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ получается из присоединенного представления соответствующей группы Ли G взятием дифференциала в единице. **б)** Докажите, что для линейной группы Ли (т.е. для произвольной подгруппы Ли G в группе $GL_n(\mathbb{R})$) присоединенное представление есть просто действие группы G сопряжениями на подпространстве $\mathfrak{g} \subset Mat_n(\mathbb{R})$.

5. а) Докажите, что присоединенное представление алгебры Ли W_1 изоморфно Ω^{-1}. **б)** Докажите, что присоединенное представление группы SO_3 изоморфно ее тавтологическому представлению (на $\mathbb{R}^3$ ортогональными матрицами). **в)** Докажите, что присоединенное представление группы SU_2 является двулистным накрытием $SU_2 \to SO_3(\mathbb{R})$. **г*)** Докажите, что присоединенное представление группы SO_4 приводимо, и постройте 2 различных гомоморфизма SO_4 на SO_3.

6*. Докажите, что всякая комплексная (голоморфная) компактная группа Ли абелева. *Указание:* рассмотрите ее присоединенное представление и воспользуйтесь теоремой Лиувилля.

Напомним, что группа диффеоморфизмов многообразия действует на дифференциальных формах на этом многообразии. Поэтому определены левоинвариантные и правоинвариантные дифференциальные формы на любой группе Ли.

7. а) Докажите, что на всякой группе Ли G есть единственная с точностью до пропорциональности левоинвариантная дифференциальная форма старшей степени. *Указание:* такая форма однозначно определяется своим значением в точке $e \in G$. Эта форма называется *мерой Хаара* и обозначается dg. **б)** Выпишите эту форму явно в координатах для группы Ли $\mathbb{R}$; **в)** для группы Ли S^1; **г*)** для группы Ли $GL_n(\mathbb{R})$.

8. а) Докажите, что одномерное вещественное представление связной компактной группы Ли тривиально. **б)** Докажите, что на связной компактной группе Ли всегда есть дифференциальная форма старшей степени, инвариантная относительно как левого, так и правого действия. *Указание:* рассмотрите старшую внешнюю степень присоединенного представления и воспользуйтесь пунктом а).

Характером представления V группы Ли G называется функция χ_V на G, такая что $\chi_V(g) := \mathrm{tr}_V\, g$. Как и для конечных групп, характер является функцией, постоянной на классах сопряженности. Для компактной группы Ли G корректно определено скалярное произведение характеров $(\chi_V, \chi_W) := \int_G \chi_V(g)\overline{\chi_W}(g)dg$.

9. а) Докажите, что всякое комплексное представление компактной группы Ли вполне приводимо. *Указание:* для компактной группы можно воспроизвести стадартное доказательство теоремы Машке для конечных групп, заменив суммирование по группе на интеграл по мере Хаара (сходящийся благодаря компактности). **б)** Докажите, что характеры неприводимых комплексных представлений компактной группы Ли образуют ортонормированную систему в пространстве всех ее характеров. *Указание:* это, опять же, повторение стандартного доказательства для конечных групп с заменой суммы на интеграл.

10. Опишите все функции на окружности S^1, являющиеся характерами конечномерных комплексных представлений группы S^1.

11. а) Докажите, что всякое представление алгебры Ли $\mathfrak{su}_2$ в комплексном векторном пространстве однозначно продолжается до представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. *Указание:* в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ матрицы Паули тоже образуют базис. **б)** Докажите, что всякое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{su}_2$ однозначно продолжается до представления группы Ли SU_2. **в)** Докажите, что всякое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ вполне приводимо. *Указание:* согласно пунктам а) и б), конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ является представлением компактной группы SU_2.

12. а) Докажите, что всякий характер группы SU_2 однозначно определяется своими значениями на подгруппе диагональных матриц $S^1 \subset SU_2$. *Указание:* всякий класс сопряженности содержит диагональную матрицу. **б)** Докажите, что ограничение всякого характера группы SU_2 на подгруппу S_1 является характером группы S^1, инвариантным относительно обращения $g \mapsto g^{-1}$.

13. а) Пусть $V = \mathbb{C}^2$ – тавтологическое представление группы Ли SU_2. Докажите, что представление S^kV для любого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ неприводимо. **б)** Докажите, что всякое неприводимое представление группы Ли SU_2 изоморфно какому-нибудь S^kV. *Указание:* вычислите характер представления S^kV и покажите, что характеры представлений вида S^kV образуют базис в пространстве всех характеров. **в)** Докажите, что всякое неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ изоморфно конечномерному подпредставлению в Ω^λ, см. задачу 2.

14. а) Пусть i, j, k – стандартный базис в алгебре Ли $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{su}_2$, такой что $[i,j] = k$, $[j,k] = i$, $[k,i] = j$. Докажите, что *элемент Казимира* $C = -i^2 - j^2 - k^2 \in U(\mathfrak{su}_2)$ лежит в центре универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{su}_2)$. *Указание:* достаточно проверить, что этот элемент коммутирует с элементами i, j, k. **б)** Докажите, что элемент Казимира действует скаляром в любом неприводимом представлении группы Ли SU_2. *Указание:* воспользуйтесь леммой Шура. **в)** Вычислите этот скаляр для каждого неприводимого представления SU_2.

15*. а) Опишите все неприводимые представления группы Ли $SO_3(\mathbb{R})$. *Указание:* воспользуйтесь гомоморфизмом $SU_2 \to SO_3(\mathbb{R})$. **б)** Разложите в прямую сумму неприводимых представление $SO_3(\mathbb{R})$ в пространстве полиномиальных функций на сфере S^2 (т.е. в пространстве $\mathbb{R}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2-1)$). *Указание:* вычислите характер представления группы $SO_3(\mathbb{R})$ в пространстве полиномиальных функций степени не выше данной.

Для любого многообразия с римановой метрикой определен *оператор Лапласа.* Это дифференциальный оператор второго порядка, являющийся композицией d^*d, где d – дифференциал де Рама, а d^* – оператор, сопряженный дифференциалу де Рама при помощи римановой метрики.

16*. а) Докажите, что оператор Лапласа на сфере S^2 (относительно стандартной римановой метрики) инвариантен относительно вращений сферы. **б)** Докажите, что оператор Лапласа является образом некоторого центрального элемента алгебры $U(\mathfrak{so}_3)$ при действии алгебры Ли $\mathfrak{so}_3$ полями скоростей на S^2, и выразите этот центральный элемент через элемент Казимира. *Указание:* вычислите значения операторов Лапласа и Казимира в какой-нибудь точке, а затем воспользуйтесь инвариантностью. **в)** Найдите все собственные значения оператора Лапласа в пространстве полиномиальных функций на сфере S^2 и укажите соответствующие собственные подпространства.