1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

5 Двумерные теории бозонов и фермионов

6 Переход к операторному формализму

7 Теория скалярного поля и алгебра Вирасоро

8 Тензор энергии-импульса и примарные операторы

8.1 Тензор энергии-импульса в теории скалярного поля

Для действия свободного скалярного поля мы давно уже определили тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\delta S[X,g]}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\tfrac{1}{2}\left(\partial_\alpha X\partial_\beta X - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}X\partial_{\beta'}X\right) \tag{8.1}$$

который является симметричным тензором ранга 2 и сохраняется на уравнениях движения свободной скалярной теории $\partial^\alpha\partial_\alpha X = 0$

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0 \tag{8.2}$$

Особенно просто это выглядит в комплексных координатах для конформной метрики

$$ds^2 = \rho dz d\bar{z} = e^\varphi dz d\bar{z} \tag{8.3}$$

где условие ковариантного сохранения (8.2) принимает вид

$$\partial_{\bar{z}}T_{zz} + \rho\partial_z(\rho^{-1}T_{z\bar{z}}) = 0 \tag{8.4}$$

вместе с комплексно-сопряженным уравнением, и для конформной теории (8.1) в силу $t_{z\bar{z}} = 0$ сводится к уравнению голоморфности

$$\partial_{\bar{z}}T_{zz} = 0, \qquad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{8.5}$$

на голоморфные токи спина 2, элементарно следующие из $\bar\partial\partial X = 0$, т.е. голоморфности производной ∂X.

Из формулы (8.1) в комплексных координатах также следует, что

$$T_{zz} = -\tfrac{1}{2}(\partial X)^2, \qquad T_{\bar z\bar z} = -\tfrac{1}{2}(\bar\partial X)^2, \qquad T_{z\bar z} = 0 \tag{8.6}$$

и это является классическим аналогом уже операторных формул

$$T = T_{zz} = -\tfrac{1}{2} : (\partial X)^2 :, \qquad \bar T = T_{\bar z\bar z} = -\tfrac{1}{2} : (\bar\partial X)^2 : \tag{8.7}$$

мы уже использовали на прошлой лекции - основная разница в нормальном упорядочении *составных операторов*.

Поскольку тензор энергии-импульса (8.1) является откликом действия на произвольную вариацию метрики, то на его компоненты в конформной калибровке можно также смотреть как на отклик действия на единственно возможные остаточные преобразования метрики - голоморфные замены координат. Буквально следует проверить, что для действия

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2z\partial_\alpha X\partial_\alpha X = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\partial X\bar\partial X \tag{8.8}$$

при преобразовании $\delta_\epsilon X = \epsilon(z,\bar z)\partial X$ верно, что

$$\delta_\epsilon S = -\frac{1}{\pi}\int d^2z\ \bar\partial\epsilon\ T \tag{8.9}$$

где $T = -\frac{1}{2}(\partial X)^2$ является голоморфным током спина 2 [1].

8.2 Составные операторы

Мы уже использовали составной операторы (8.7), который уже определен лишь с помощью нормального упорядочения. Аналогичные проблемы возникают и при определении других составных операторов.

В качестве базового примера рассмотрим экспоненту от скалярного поля

$$V_p(z,\bar z) =: \exp(ipX(z,\bar z)) : \tag{8.10}$$

которая должна быть нормально упорядочена. Разница между упорядоченой и неупорядоченой экспонентой легко определеть при введении ультрафиолетового обрезания

$$\begin{aligned}\exp(ipX(z,\bar z)) &= 1 + ipX(z,\bar z) + \frac{(ip)^2}{2}X(z,\bar z)^2 + \ldots = \\ &= 1 + : ipX(z,\bar z) : + : \frac{(ip)^2}{2}X(z,\bar z)^2 : + \frac{(ip)^2}{2}\langle X(z,\bar z)^2\rangle + \ldots\end{aligned} \tag{8.11}$$

[1]Мы будем пользоваться естественными (нормальными и аномальными) размерностями $(\Delta,\bar\Delta)$ относительно голоморфных и антиголоморфных преобразований по отдельности. При этом их сумма $\Delta+\bar\Delta$ является масштабной размерностью, а разница $\Delta-\bar\Delta$ называется спином (почему?).

коррелятора в совпадающих точках

$$\langle X(z,\bar{z})^2\rangle \underset{\mathrm{def}}{=} -\log|z-z'|^2\big|_{z-z'=\epsilon} = -\log\epsilon^2 \tag{8.12}$$

Таким образом получается, что

$$\begin{gathered}\exp(ipX(z,\bar{z})) =: \exp(ipX(z,\bar{z})) : \left(1+\frac{p^2}{2}\log\epsilon^2+\ldots\right) = \\ =: \exp(ipX(z,\bar{z})) : \epsilon^{p^2}\end{gathered} \tag{8.13}$$

нормально упорядоченная экспонента отличается от неупорядоченной на сингулярный фактор ϵ^{p^2}. Ровно такой же фактор мы получали вычисляя функциональный интеграл, поэтому теперь можно утверждать, что корреляционная функция

$$\langle\prod_j \exp(ip_jX(z_j,\bar{z}_j))\rangle = \langle 0|\prod_j : \exp(ip_jX(z_j,\bar{z}_j)) : |0\rangle = \prod_{i<j}|z_i-z_j|^{p_ip_j} \tag{8.14}$$

понимаемая как вакуумный матричный элемент от упорядоченных экспонент - вершинных операторов

$$\begin{gathered}V_p(z,\bar{z}) =: \exp(ipX(z,\bar{z})) := e^{ipX_0}(z\bar{z})^{p\alpha_0}\cdot \\ \cdot\exp\left(p\sum_{n>0}\left(\frac{\alpha_{-n}}{n}z^n+\frac{\bar{\alpha}_{-n}}{n}\bar{z}^n\right)\right)\exp\left(-p\sum_{n>0}\left(\frac{\alpha_n}{nz^n}+\frac{\bar{\alpha}_n}{n\bar{z}^n}\right)\right)\end{gathered} \tag{8.15}$$

где мы пока можем временно забыть про нулевую моду. Произведение операторов в (8.15) упорядочено, а действие этого оператора на вакуум (в точке $z=0$) дает

$$\lim_{z\to 0}V_p(z,\bar{z})|0\rangle = |p\rangle = |p,0,0\rangle \tag{8.16}$$

примарное состояние $L_n|p\rangle = \bar{L}_n|p\rangle = 0$, $n>0$ с импульсом p и вирасоровскими размерностями

$$\begin{aligned}L_0|p\rangle &= \left(\tfrac{1}{2}\alpha_0^2+\sum_{n>0}\alpha_{-n}\alpha_n\right)|p,0,0\rangle = \tfrac{1}{2}p^2|p\rangle \\ \bar{L}_0|p\rangle &= \left(\tfrac{1}{2}\alpha_0^2+\sum_{n>0}\bar{\alpha}_{-n}\bar{\alpha}_n\right)|p,0,0\rangle = \tfrac{1}{2}p^2|p\rangle\end{aligned} \tag{8.17}$$

что целиком следует из динамики нулевой моды в p-представлении

$$\alpha_0|p\rangle = p|p\rangle, \qquad e^{ikX_0}|p\rangle = |k+p\rangle \tag{8.18}$$

т.к. в этом представлении $X_0 = -i\frac{\partial}{\partial p}$.

Осталось вычислить коррелятор (8.14). Например, для двухточечной функции имеем

$$\begin{aligned}\langle V_p(z,\bar z)V_{-p}(z',\bar z')\rangle &= \exp\left(p^2\langle X(z,\bar z)X(z',\bar z')\rangle\right) = \\ &= \exp\left(-p^2\log|z-z'|^2\right) = \frac{1}{(z-z')^{p^2}(\bar z-\bar z')^{p^2}}\end{aligned} \tag{8.19}$$

из операторного разложения для фундаментальных полей X - координат струны.

Вспомним теперь замечательные формулы (Кэмпбелла-Хаусдорффа?) для экспонент от некоммутирующих операторов $[A,B]\neq 0$

$$e^{t(A+B)} = e^{tB}L(t), \qquad \dot L = e^{-tB}Ae^{tB}L, \qquad L(t) = T\exp\left(\int_0^t dt' e^{-t'B}Ae^{t'B}\right) \tag{8.20}$$

что (только!) при $[A,B]=\gamma\mathbf{1}$ дает в том числе

$$\begin{gathered} e^{A+B} = e^Be^Ae^{\gamma/2}, \qquad e^{A+B} = e^Ae^Be^{-\gamma/2} \\ e^Ae^B = e^Be^Ae^{\gamma} = e^Be^Ae^{[A,B]}\end{gathered} \tag{8.21}$$

Применим эту формулу к ингредиентам (8.15)

$$e^{-p\frac{\alpha_n}{nz^n}}e^{q\frac{\alpha_{-n}}{n}w^n} = e^{q\frac{\alpha_{-n}}{n}w^n}e^{-p\frac{\alpha_n}{nz^n}}\exp\left(-\frac{pq}{n}\left(\frac{w}{z}\right)^n\right) \tag{8.22}$$

где справа теперь стоит нормально упорядоченной произведение по фоковскому вакууму, поэтому для вакуумного матричного элемента произведения по всем гармоникам получим просто

$$\langle 0|\prod_{n>0}e^{-p\frac{\alpha_n}{nz^n}}\prod_{n>0}e^{q\frac{\alpha_{-n}}{n}w^n}|0\rangle = \prod_{n>0}\exp\left(-\frac{pq}{n}\left(\frac{w}{z}\right)^n\right) = \left(1-\frac{w}{z}\right)^{pq} \tag{8.23}$$

где произведение или логарифмический ряд сходится опять же при $|w|<|z|$. Антиголоморфный вклад получается комплексным сопряжением, и учитывая нулевую моду окончательно получим

$$\begin{aligned}\langle 0| :\exp(ipX(z,\bar z))::\exp(-ipX(z',\bar z')):|0\rangle &= \left(1-\frac{w}{z}\right)^{-p^2}\left(1-\frac{\bar w}{\bar z}\right)^{-p^2}\cdot \\ \cdot\langle 0|e^{ipX_0}(z\bar z)^{p\alpha_0}e^{-ipX_0}(z'\bar z')^{-p\alpha_0}|0\rangle &= \left(1-\frac{w}{z}\right)^{-p^2}\left(1-\frac{\bar w}{\bar z}\right)^{-p^2}(z\bar z)^{-p^2} = \\ &= \frac{1}{(z-z')^{p^2}(\bar z-\bar z')^{p^2}}\end{aligned} \tag{8.24}$$

искомый результат. Точно также можно из формул КХ вывести и более общее соотношение для операторного произведения

$$\begin{aligned}V_p(z,\bar z)\cdot V_q(z',\bar z') &= (z-z')^{pq}(\bar z-\bar z')^{pq}:\exp\left(ipX(z,\bar z)+iqX(z',\bar z')\right) := \\ &= (z-z')^{pq}(\bar z-\bar z')^{pq}\left(V_{p+q}(z',\bar z') + ip(z-z'):\partial X\ V_{p+q}(z',\bar z'):+c.c+\ldots\right)\end{aligned} \tag{8.25}$$

являющееся очень частным случаем операторного разложения примарных полей в двумерной конформной теории поля.

8.3 Конформная симметрия

Операторное разложение генерирует закон преобразования полей при бесконечно-малом координатном преобразовании $z \to z - \epsilon(z)$. Например для фундаментального поля - голоморфного тока $J = i\partial X$ единичной размерности и спина $(\Delta, \bar{\Delta}) = (1, 0)$

$$\delta_\epsilon J(z) = \oint_{z \frown w} \frac{dw}{2\pi i} \epsilon(w) T(w) J(z) = \epsilon'(z) J(z) + \epsilon(z) J'(z) \tag{8.26}$$

т.е. ток преобразуется при голоморфных заменах координат как поле единичной размерности, т.е. инвариантом является $J(z)dz$, а генератором преобразования - ровно в указанном выше смысле - тензор энергии-импульса. Для (примарного) поля с произвольными размерностями $(\Delta, \bar{\Delta})$ аналогичный закон преобразования следует из операторных разложений

$$\begin{aligned} T(z)\Phi(z', \bar{z}') &= \frac{\Delta}{(z - z')^2} \Phi(z', \bar{z}') + \frac{1}{z - z'} \partial \Phi(z', \bar{z}') + \ldots \\ \bar{T}(\bar{z})\Phi(z', \bar{z}') &= \frac{\bar{\Delta}}{(\bar{z} - \bar{z}')^2} \Phi(z', \bar{z}') + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}'} \bar{\partial} \Phi(z', \bar{z}') + \ldots \end{aligned} \tag{8.27}$$

с генераторами голоморфной и антиголоморфной конформной симметрий. Отсюда прямой подстановкой получаем, например, для голоморфного сектора

$$\delta_\epsilon \Phi(z, \bar{z}) = \oint_{z \frown w} \frac{dw}{2\pi i} \epsilon(w) T(w) \Phi(z, \bar{z}) = \Delta \epsilon'(z) \Phi(z, \bar{z}) + \epsilon(z) \partial \Phi(z, \bar{z}) \tag{8.28}$$

что естественным образом отвечает инвариантности при голоморфных заменах координат величин $\Phi(z, \bar{z}) dz^\Delta d\bar{z}^{\bar{\Delta}}$. В квантовой теории (аномальные!) размерности $(\Delta, \bar{\Delta})$ не обязаны быть целыми, и задача двумерной конформной теории - вычислить эти размерности из свойств представлений алгебры Вирасоро.

В теории свободного скалярного поля примарными полями являются

$$V_\alpha(z, \bar{z}) =: \exp(i\alpha X(z, \bar{z})) : \tag{8.29}$$

конформные размерности $\Delta_\alpha = \bar{\Delta}_\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 = \Delta_{-\alpha} = \bar{\Delta}_{-\alpha}$ которых мы уже определили из двухточечной корреляционной функции

$$\begin{aligned} \langle V_\alpha(z, \bar{z}) V_{-\alpha}(z', \bar{z}') \rangle &= \exp\left(\alpha^2 \langle X(z, \bar{z}) X(z', \bar{z}') \rangle\right) = \\ &= \exp\left(-\alpha^2 \log |z - z'|^2\right) = \frac{1}{(z - z')^{\alpha^2} (\bar{z} - \bar{z}')^{\alpha^2}} \end{aligned} \tag{8.30}$$

но, естественно, можем вычислить и из операторного разложения с помощью теоремы Вика. Формулы (8.27) естественным образом согласованы и с нашими рассуждениями про соответствия между вершинными операторами и состояниями

$$\begin{gathered} V_p(0, 0)|0\rangle = |p\rangle, \quad L_n|p\rangle = 0, \quad n > 0 \\ L_0|p\rangle = \tfrac{1}{2}p^2|p\rangle = \Delta_p|p\rangle \end{gathered} \tag{8.31}$$

т.е.
$$\lim_{z\to 0} T(z)|p\rangle = \lim_{z\to 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}|p\rangle = \lim_{z\to 0} \left(\frac{\Delta}{z^2} + \frac{L_{-1}}{z} + \mathrm{reg} \right) |p\rangle \tag{8.32}$$
или
$$\lim_{z\to 0} T(z)V_p(0) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{\Delta_p V_p(0)}{z^2} + \frac{\partial V_p(0)}{z} + \mathrm{reg} \right) \tag{8.33}$$
откуда сразу следует, что L_{-1} действует как производная по z.

Наконец, преобразование при голоморфных заменах координат
$$\delta_\epsilon T(z) = 2\epsilon'(z)T(z) + \epsilon(z)\partial T(z) + \frac{c}{12}\epsilon'''(z) \tag{8.34}$$
самого тензора энергии-импульса $T(z)$ следовало бы из операторного разложения
$$T(z)T(z') = \frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \ldots \tag{8.35}$$
Действительно
$$\begin{gathered} \delta_\epsilon T(z) = \oint_{z\curvearrowleft w} \frac{dw}{2\pi i}\epsilon(w)T(w)T(z) = \\ = \oint_{z\curvearrowleft w} \frac{dw}{2\pi i}\epsilon(w) \left(\frac{c}{2(w-z)^4} + \frac{2T(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{w-z} + \ldots \right) = \\ = \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{6}\epsilon'''(z) + 2\epsilon'(z)T(z) + \epsilon(z)\partial T(z) \end{gathered} \tag{8.36}$$
т.е. - по сравнению с примарным полем - лишний полюс 4-го порядка дает аномальный вклад в закон преобразования тензора - конформную аномалию.