

Листок 3

1. Найти преобразование Фурье функции

$$\frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

2. Пусть S_r – сфера радиуса r с центром в начале координат и $\delta_{S_r}(x)$ – простой слой на этой сфере. Доказать, что

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\Omega_n r^{n-1}} \delta_{S_r}(x) - \delta(x) \right) \rightarrow \frac{1}{2n} \Delta \delta(x), \quad \text{при } r \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{D}',$$

где Ω_n – площадь поверхности единичной сферы в R^n .

3. Показать, что

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \quad a > 0, |x| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

– фундаментальное решение дифференциального оператора $\partial_t^2 - a^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$.

4. Найти запаздывающую и опережающую функции Грина свободного уравнения Шредингера

$$i\partial_t \phi = -\frac{1}{2} \Delta \phi.$$

5. Труба радиуса R и бесконечной длины помещена в грунт на глубину h и поддерживается при постоянной температуре T_0 . Найти распределение температуры в грунте, если на поверхности земли $T = 0$. Построить линии постоянной температуры.

6. а. Дан простой слой с равномерно распределенным зарядом плотности μ на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ радиуса R . Найти потенциал электрического поля во всем пространстве.

б. Дан двойной слой с равномерно распределенным дипольным моментом плотности ν на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ радиуса R . Найти потенциал электрического поля.