Теория струн 2014

Задачи 7. Свободное поле и алгебра Вирасоро

1. В двумерных теориях поля удобно пользоваться комплексными координатами $z = x_1+ix_2$, $\bar{z} = x_1-ix_2$. Рассмотрим теорию свободного скалярного поля X в *евклидовой* плоскости с координатами x_1, x_2, действием

$$S[X] = \frac{1}{2}\int(\partial_\alpha X)^2 dx_1 dx_2 \tag{1}$$

и тензором энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{8} :\Big(\partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(\partial_\gamma X)^2\Big): \tag{2}$$

   а) Выразите евклидову метрику на плоскости в комплексных координатах $z, \bar{z}$ и запишите действие (1) в комплексных координатах.

   б) Выразите компоненты тензора энергии-импульса (2)

$$T := T_{zz}, \quad \bar{T} := T_{\bar{z}\bar{z}}, \quad \Theta := T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z}$$

   в координатах $z, \bar{z}$ через его компоненты $T_{11},\ T_{22},\ T_{12} = T_{21}$ в исходных координатах.

   в) Как выглядит условие сохранения тензора энергии-импульса $\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0$ в комплексных координатах? Что оно означает в случае, если след тензора энергии-импульса равен 0?

2. Пусть $J(z) = i\partial X(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z^{-k-1}a_k$ – голоморфный ток в теории с действием (1), где операторы a_k удовлетворяют алгебре Гейзенберга $[a_n,\, a_m] = n\,\delta_{n+m,0}$.

   а) Покажите, что голоморфная компонента тензора энергии-импульса выражается в виде $T(z) = \frac{1}{2} :J^2(z):$.

   б) Получите выражения для компонент $L_n, n \in \mathbb{Z}$ разложения тензора энергии-импульса $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2}L_n$ в терминах операторов a_k.

   в) Используя коммутационные соотношения алгебры Гейзенберга, прямым вычислением проверьте, что операторы L_n удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Вирасоро

$$[L_m,\, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \tag{3}$$

   с центральным зарядом $c = 1$.

   г) Докажите, что $[L_m,\, J(z)] = (m+1)z^m J(z) + z^{m+1}\partial J(z)$ и выведите отсюда, что $[L_m,\, J_n] = -nJ_{n+m}$.

3. Нормально упорядоченное выражение $:A:$, где A – любая полиномиальная функция от операторов a_k, определяется как то же выражение, в котором операторы рождения перемещены налево, а операторы уничтожения направо, как если бы они коммутировали.

а) Покажите, что

$$:\!J^2(z)\!: = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_z} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\, J(\zeta)J(z)$$

где $\mathcal{C}_z$ – маленький контур, охватывающий точку z.

б) Выразите произведение четырех токов $J(z_1)J(z_2)J(z_3)J(z_4)$ через нормально упорядоченные выражения и вакуумные средние (аналогично формуле $J(z_1)J(z_2) = \,:\!J(z_1)J(z_2)\!: + \left\langle 0 \,\middle|\, J(z_1)J(z_2) \,\middle|\, 0 \right\rangle$).

4. Рассмотрим оператор

$$W(z) = \frac{1}{3}:\!J^3(z)\!: = \sum_{m\in\mathbb{Z}} W_m z^{-m-3}$$

а) Получите явное выражение для оператора W_0 через генераторы алгебры Гейзенберга a_k.
(*Примечание:* Оператор W_0 играет важную роль в теории разветвленных накрытий римановой сферы, где он известен под названием оператора разрезания и склейки (cut and join). В другом контексте этот же оператор известен как гамильтониан системы Калоджеро.)

б)* Найдите коммутационные соотношения операторов W_m.